Государственное бюджетное образовательное учреждение
среднего профессионального образования Иркутской области
«Братский промышленно-гуманитарный техникум»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной (внеаудиторной) работе обучающихся по дисциплине (профессиональному модулю) «Элементы высшей математики»

Методические указания составлены в соответствии с ФГОС СПО по специальности **230401 Информационные системы (по отраслям)**

Методические указания составил(а) преподаватель Петухова Е.Г. преподаватель математики I категории

Методические указания обсуждены на заседании цикловой комиссии информационно-гуманитарных дисциплин
«__»________2012, протокол № ___

Председатель ЦК ___________ Н. А. Орлова
Подпись

Методические указания согласованы с заместителем директора по УМР ___________ Тилькунова Е.В.
Подпись Ф.И.О.

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для выполнения студентами самостоятельной работы по дисциплине «Элементы высшей математики» по индивидуальным заданиям с целью изучения разделов математики, относящихся к элементам высшей математики, используемых наиболее часто при решении прикладных технических, экономических, управленческих и других подобных задач, для которых применение математического аппарата является наиболее эффективным методом их решения. В пособие включены такие разделы, как «Пределы функций», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Векторы на плоскости и в пространстве», «Линии на плоскости», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Линейная алгебра», включенные в программу изучения математики на II курсе колледжа различных специальностей.

В начале каждого раздела приводятся краткие сведения из теории, носящие справочный характер. Основное внимание уделяется практическому освоению студентами изучаемого материала. Для достижения этой цели приводится большое число упражнений. Их выполнение будет способствовать выработке навыков рационального решения типовых примеров и задач, развивающих навыки применения изученного математического инструментария. Задания для самостоятельной работы, представленные в виде индивидуальных заданий, следуют после каждого раздела и дифференцируются по сложности. Наиболее сложные задачи а задании помечены (*).

Подготовка к выполнению каждого индивидуального задания включает в себя изучение теоретического материала по данной теме, разбор и анализ решения типовых задач, рассматриваемых на лекциях и на практических занятиях и задаваемых в виде домашнего задания.

Вариант индивидуального задания выбирается студентом в соответствии с его номером № по журналу. Если номер по журналу превышает 30, то номер его варианта будет соответственно равен №-30.

На самостоятельную работу по дисциплине (профессиональному модулю) учебным планом и рабочей программой отводится 61 час.

Содержание самостоятельной работы

№ п/п	Тема	Задание	Алгоритм выполнения задания	Форма представления выполненного задания	Сроки сдачи выполненного задания	Форма контроля и оценивания
1	Матрицы. Определители.	Раздел VII, п. 1, 2 Задача 1,2	Раздел VII, п. 1, 2	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
2	Системы линейных уравнений	Раздел VII, п. 3 Задача 3	Раздел VII, п. 3	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
3	Векторы	Раздел IV, п. 1 Задача 1	Раздел IV, п. 1	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
4	Аналитическая геометрия	Раздел IV, п. 2 Задача 2	Раздел IV, п. 2	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
5	Теория пределов	Раздел I, Задача 1,2,4	Раздел I	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
6	Дифференциальное исчисление	Раздел II, Задача 1,2,3,4	Раздел II	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале

7	Интегральное исчисление	Раздел III, Задача 1,2,3,4	Раздел III	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале
8	Дифференциальные уравнения	Раздел VI, Задача 1,2	Раздел VI	тетрадь		Проверка тетрадей и оценивание по пятибалльной шкале

Приложения

Содержание

I Пределы функций

Определим понятие **окрестности** точки x_0 как множество значений x, являющихся решениями неравенства $0<|x - x_0| < \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое число. Само значение x_0 может включаться в окрестность или не включаться в нее (в этом случае окрестность называется проколотой).

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$.

Замечание. Для существования предела функции в точке x_0 не требуется, чтобы функция была определена в самой этой точке.

Примеры.

1. Докажем, что $\lim\limits_{x \to 3}(2x+1) = 7.$ Если $|2x+1-7| < \varepsilon$, то $|2x - 6| < \varepsilon$, $|x - 3| < \varepsilon/2$. Таким образом, если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, то выполнены все условия определения предела. Утверждение доказано.
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 2 + 1 = 3.$ Заметим, что в проколотой окрестности x=2 $x - 2 \neq 0,$ поэтому мы имеем право сократить дробь на $(x - 2)$.

Функция $y = f(x)$ имеет **бесконечный предел** при x, стремящемуся к x_0 (стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $|f(x)| > M$ при $|x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

Число A называется **пределом функции $y = f(x)$ на бесконечности**, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists X > 0 : | f(x) - A | < \varepsilon$ при $x > X$ ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$), при $x < -X$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$), при $|x| > X$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$).

Замечание. Бесконечный предел функции на бесконечности можно определить по аналогии с этими определениями.

Свойства пределов.

1. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$ (A – конечное число), то функция $y = f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности (возможно, проколотой) точки x_0.

2. Функция не может иметь двух различных пределов при x, стремящемуся к одному и тому же значению.

3.Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $A \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак ($f(x)>0$, если $A > 0$, и $f(x)<0$, если $A < 0$).

Односторонние пределы.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева (справа), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x_0 - x < \delta$ ($x - x_0 < \delta$).

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

Теорема (второе определение предела). Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к x_0, предел, равный A, в том и только в том случае, если оба ее односторонних предела в этой точке существуют и равны A.

Предел числовой последовательности.

Числовую последовательность $\{a_n\}$ можно считать функцией дискретного аргумента n и применить к ней определение предела:

Число A называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N : |a_n - A| < \varepsilon$ при $n > N$

Бесконечно малые функции и их свойства. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Натуральный логарифм и гиперболические функции.

Функция $y=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Свойства бесконечно малых.

1.Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.
Замечание. Отсюда следует, что сумма любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.
2.Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, а $f(x)$ – функция, ограниченная в некоторой окрестности x_0, то $\alpha(x)f(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.
Следствие 1. Произведение бесконечно малой на конечное число есть бесконечно малая.
Следствие 2. Произведение двух или нескольких бесконечно малых есть бесконечно малая. Следствие 3. Линейная комбинация бесконечно малых есть бесконечно малая.

3.(Третье определение предела). Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то необходимым и достаточным условием этого является то, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.
Замечание. Тем самым получено еще одно определение предела, эквивалентное двум предыдущим.

Основные теоремы о пределах.

Теорема1. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то существует и

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B.$

Теорема2. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ***и*** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то существует и

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$

Теорема3. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$**,** то существует и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Замечательные пределы.

Теорема 1. (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx} = k\cdot 1 = k.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{1}{\cos kx} = k\cdot 1 = k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin mx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{x}{\sin mx} = k\dfrac{1}{m} = \dfrac{k}{m}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{tgmx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}\dfrac{x}{tgmx} = \dfrac{k}{m}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y} = 1,$ где $y = \arcsin x$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{tgy} = 1,$ где $y = \mathrm{arctg}x$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2(\dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{1}{2}.$

Теорема 2. (второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Замечание. Число $e \approx 2{,}7$.

Следствия из второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$ где $a>0$, $y=a^x-1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

Бесконечно большие функции.

Функция f(x) называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ считаются величинами одного порядка, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A, |A|<\infty$.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то $f(x)$ считается бесконечно большой более высокого порядка, чем $g(x)$.
3. Бесконечно большая $f(x)$ называется величиной k-го порядка относительно бесконечно большой $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=A, |A|<\infty$.

Теорема .
Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, то $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$.

Примеры на нахождении пределов функций.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение.

Имеем: $\frac{\sin 5x}{x}=5\frac{\sin 5x}{5x}$. Обозначим t = 5x. При $x\to 0$ имеем: $t\to 0$. Применяя формулу первого замечательного предела, получим $5\frac{\sin t}{t}\to 5$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

Решение.

Обозначим $y=\pi-x$. Тогда при $x\to\pi$, $y\to 0$.Имеем:

$\sin 3x = \sin 3(\pi-y) = \sin(3\pi-3y) = \sin 3y$.

$\sin 4x = \sin 4(\pi-y) = \sin(4\pi-4y)= -\sin 4y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\sin 4y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{4y}{\sin 4y}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение

Обозначим arcsin x=t. Тогда x=sin t и при $x\to 0$ $t\to 0$. $\dfrac{\arcsin x}{x}=\dfrac{t}{\sin t}\to 1$.

4. Найти 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Решение.

1) Применяя теорему 1 о пределе разности и произведения, находим предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x-2)=1-1-2=-2.$$

Предел знаменателя не равен нулю, поэтому, по теореме 1 о пределе частного, получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

2) Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида 0/0. Теорема о пределе частного непосредственно неприменима. Для “раскрытия неопределенности” преобразуем данную функцию. Разделив числитель и знаменатель на x-2, получим при $x\neq 2$ равенство:

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{x+2}{x+1}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\neq 0$, то, по теореме о пределе частного, найдем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}=\frac{4}{3}.$$

3) Числитель и знаменатель при $x\to\infty$ являются бесконечно большими функциями. Поэтому теорема о пределе частного непосредственно не применима. Разделим числитель и знаменатель на x^2 и к полученной функции применим теорему о пределе частного:

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\to 1.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$.

Решение.

Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю: $\sqrt[3]{x-1}-2\to 0$, $x-9\to 0$, т.е. имеем неопределенность вида 0/0.

Преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы выражения $\sqrt[3]{x-1}-2$, получим

$$\frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}=\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4}\to\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to -\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x+5}$.

Решение.

$$(1+\frac{2}{x})^{x+5} = ((1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}})^2 \cdot (1+\frac{2}{x})^5 \to e^2 \cdot 1 = e^2.$$

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций. Точки разрыва функций и их классификация.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Замечание. Из этого определения следует, во-первых, что функция определена при $x = = x_0$, и во-вторых, что при $x\to x_0$ существует конечный предел функции.

Свойства непрерывных функций.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)+g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)/g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$.
4. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$, а $f(u)$ непрерывна при $u = u(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

Точки разрыва и их классификация.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой этой точки. Тогда x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если она либо не определена при $x = x_0$, либо не является непрерывной в точке x_0.

Если существует конечный предел $f(x)$ при $x\to x_0$, но не равный $f(x_0)$, точка разрыва x_0 называется **устранимой особенностью**.

Замечание. Термин «устранимая особенность» связан с тем, что, доопределив функцию в точке разрыва значением ее предела в этой точке, мы сделаем ее непрерывной при $x = x_0$, то есть устраним разрыв в рассматриваемой точке.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x)$ при $x\to x_0$, точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**.

Все остальные точки разрыва называются **точками разрыва 2-го рода**.

Примеры.

1. $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$. Функция не определена при $x = 1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y = x - 2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = 1-2=-1$, то есть $x = 1$ – устранимая особенность.

2. $y = \frac{|x|}{x}$. Из определения модуля следует, что $y = 1$ при $x > 0$, $y = -1$ при $x < 0$, а при $x = 0$ функция не определена. При этом $\lim\limits_{x\to +0}\frac{|x|}{x} = 1, \lim\limits_{x\to -0}\frac{|x|}{x} = -1$. Следовательно, $x = 0$ –точка разрыва 1-го рода.

3. $y = \frac{1}{x^2}$. Функция не определена при $x = 0$, и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$. Поэтому $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

4. $y = e^{\frac{1}{x}}$. $\lim\limits_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \lim\limits_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$ то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

5. $y=\sin\frac{1}{x}$. Функция не определена при $x = 0$ и не имеет предела при $x\to 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Варианты индивидуальных заданий №1.

Задача 1.

Найти предел функции

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+2}$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x+2}{2x^3-x^2+1}$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{4x^2-2x+1}$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x+3}{x^4+x^3+x}$$

5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{3x^2+2x-1}$$

6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+2}{6x^3-5}$$

7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-1}{x^4+x^3-x}$$

16.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-5x+2}{5x^2-3x+2}$$

17.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+x}{x^5+3x^2+6}$$

18.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3x+1}{x^3-3x^2+x+1}$$

19.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-x+1}{x^3+1}$$

20.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1000x+1001}{x^2-1}$$

21.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x+1}{x^2-3x+5}$$

22.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+7}{5x^2+6x-7}$$

8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1}{5x^2-6x+2}$$

9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-7}{3x^2+x}$$

10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^2+x}{x^6-x^4+2}$$

11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2-4}$$

12.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{7x^2+x-1}$$

13.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{x^2+x+2}$$

14.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+10x+5}{2x^2-x+3}$$

15.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2-1}{x^3+x-2}$$

23.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2+5}{6x^5+3x^3+10x}$$

24.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-2x+12}{5x^2-3x+4}$$

25.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-3x+5}{6x^2+7x-10}$$

26.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{128x^2+1373}{x^3+1}$$

27.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{671x-5023}{x^2+7}$$

28.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3x+6x}{x^6+x^4+x^3+1}$$

29.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+10x^2+2x+5}{2x^5-10x^2+3x+28}$$

30.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+25x-10}{x^2+10x+30}$$

Задача 2.

Найти предел алгебраической функции:

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^3}$$

4.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$$

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2x^2-x}{5x}$$

8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$$

16.

$$\lim_{x\to 8}\frac{5-\sqrt{9+2x}}{x-8}$$

17.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$$

18.

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{8+x}$$

19.

$$\lim_{x\to 16}\frac{32-2x}{\sqrt{x}-4}$$

20.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$$

21.

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{6+x}-x}$$

22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-8x}{\sqrt{1+2x}-1}$$

23.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$$

9.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

10.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{2-2x}$$

11.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{2(1-x^2)}$$

12.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

13.

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2-x}$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-x}{x}$$

15.

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x-20}{\sqrt{x}-2}$$

24.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

25.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt{9+2x}-5}$$

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}$$

27.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$$

28.

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{x-1}-2}$$

29.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{3x^2}$$

30.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$$

(*) Задача 3.

Используя первый замечательный предел, найти:

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 3x}{2x}$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1-x)}$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 4x}{2x}$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1x}{2x}$$

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{2x}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x-2x^2}$$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 5x}{x}$$

17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\cos 6x-1}$$

18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{tg 2x}$$

19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx+tg 3x}{x}$$

20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos^2 x}{x}$$

21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x+\sin 5x}$$

22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x-tgx}{x}$$

23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 10x-1}{3x^2}$$

9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{3x}$$

10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{x}$$

11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3(x+\pi))}{2x}$$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+x)}{tg\,3x}$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2x}$$

15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(10(x+\pi))}{2x}$$

24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7(x+\pi))}{x}$$

25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,tg\,3x}{\sin 5x}$$

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x+tg\,7x}{2x}$$

27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2}{\cos 9x-\cos 3x}$$

28.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{7x}$$

29.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x-\sin 6x}{2x}$$

30.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(3(2x+\pi))}$$

Задача 4.

Используя второй замечательный предел, найти:

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2/x}}{x-2}$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-x+1)^{5/x}}{x+2}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{2/x}}{2x+1}$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{3/x}}{x-5}$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-x+1)^{2/x}}{x-3}$$

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{5/x}}{6x+3}$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{2/x}}{3x+2}$$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2/5x}}{x+3}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{3/x}}{3x+4}$$

17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4x+1)^{2/x}}{x+1}$$

18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{5/x}}{x+3}$$

19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{3/2x}}{x+5}$$

20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{5/2x}}{2x+3}$$

21.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{3/x}}{x-3}$$

22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4x+1)^{3/x}}{x-6}$$

23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4x+1)^{4/x}}{4x-1}$$

9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{3/5x}}{x-3}$$

10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{3/2x}}{2x-2}$$

11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{2/x}}{x+6}$$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4x+1)^{4/x}}{4x+2}$$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{3/x2}}{x+3}$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{4/x}}{x-2}$$

15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2/7x}}{x+2}$$

24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(8x+1)^{2/x}}{x+6}$$

25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{2/3x}}{x+8}$$

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{;/x}}{x+9}$$

27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^{2/3x}}{2x-1}$$

28.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{3/x}}{x+4}$$

29.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{1/5x}}{3x-4}$$

30.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{6/x}}{x+9}$$

(*) Задача 5.

Определить точки разрыва функции, исследовать их характер:

1.

$$y = \frac{1}{x^2(x+2)}$$

2.

$$y = \frac{2x}{(x-3)(2x+6)}$$

3.

$$y = \frac{1}{(x+4)(x-1)}$$

4.

$$y = \frac{2x+5}{(x-3)(x+2)}$$

5.

$$y = \frac{1}{(x+1)(x-4)}$$

6.

$$y = \frac{1}{2x(x+7)}$$

7.

$$y = \frac{2x-3}{(x+1)(3x+4)}$$

8.

$$y = \frac{x-5}{(2x+3)(x-5)}$$

16.

$$y = \frac{2x+5}{x(3x+6)}$$

17.

$$y = \frac{2x-1}{x^2-6x+5}$$

18.

$$y = \frac{1}{(3x-4)(x+2)}$$

19.

$$y = \frac{25}{x^2+6x+9}$$

20.

$$y = \frac{2x-3}{3x(x-1)^2 x}$$

21.

$$y = \frac{x+4}{(3x-6)(x+7)}$$

22.

$$y = \frac{2x-4}{x^2-8x+16}$$

23.

$$y = \frac{x-8}{(x+5)(2x-10)}$$

9.

$$y = \frac{2x+4}{(x-4)(2x+7)}$$

10.

$$y = \frac{2}{x^3(2x+5)}$$

11.

$$y = \frac{3x^2+1}{(x^2-2)}$$

12.

$$y = \frac{x-5}{(2x+6)(x+5)}$$

13.

$$y = \frac{2x-3}{x^2-4}$$

14.

$$y = \frac{3}{x^2-5x+6}$$

15.

$$y = \frac{4}{x^2-16}$$

24.

$$y = \frac{2x+1}{(x-3)(x+5)}$$

25.

$$y = \frac{x}{2(x-5)^2}$$

26.

$$y = \frac{x+3}{x^2-4x+3}$$

27.

$$y = \frac{1}{x^2-16}$$

28.

$$y = \frac{x-5}{(x+4)(2x-8)}$$

29.

$$y = \frac{2x-1}{x^2-10+9}$$

30.

$$y = \frac{1}{(3x-4)(x+2)}$$

II Дифференциальное исчисление.

Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

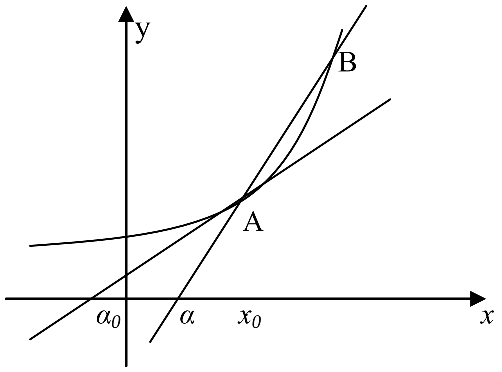
Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную в окрестности точки x_0.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется **производной** функции f в точке x_0.

Обозначение: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента**, а $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ - **приращением функции**. Таким образом, можно определить производную как $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем секущую через точки A с абсциссой x_0 и B с абсциссой $x_0+\Delta x$. Если обозначить разность ординат этих точек Δy, то тангенс угла α, образованного секущей с осью Оx, можно представить так: $tg\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если$\Delta x\to 0$, точка B перемещается по кривой, приближаясь к точке A, и секущая при совпадении точек B и A превращается в касательную к графику функции, образующую с осью Ox угол α_0. При этом $tg\alpha_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Следовательно, **значение производной при данном значении *x* равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением *x* с положительным направлением оси *Ox*.**

Механический смысл производной.

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: $s=f(t)$. Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле: $v_{cp}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим: $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{(t_0+\Delta t)-t_0}=s'(t_0)$. Таким образом, производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент. Соответственно, **производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом *x*.**

Уравнение касательной к графику функции.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ при $x = x_0$. Эта прямая должна проходить через точку с координатами (x_0,y_0), лежащую на графике функции, где $y_0 = f(x_0)$, и иметь угловой коэффициент, равный производной $f(x)$ при $x = x_0$. Получим: $y = f`(x_0)x + b$, причем $y_0 = f`(x_0)x_0 + b$, то есть $b = y_0 - f`(x_0)x_0$. Тогда уравнение касательной можно записать в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Дифференцируемость функции.

Если приращение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ можно представить в виде

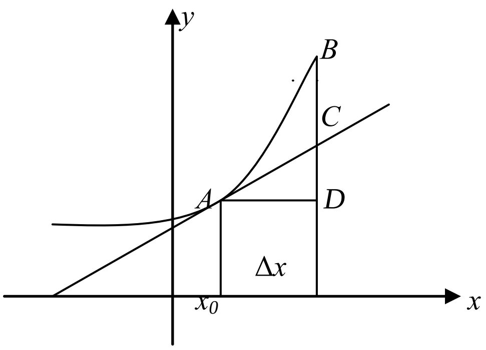
$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad ,$$

где A = const, то $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** при $x = x_0$, а $A\Delta x$ называется **главной линейной частью** приращения или **дифференциалом** функции.
Обозначение: $dy = A\Delta x$.
Замечание. Так как при $y = x$ получаем $dx = 1 \cdot \Delta x$, можно обозначать $\Delta x = dx$.

Теорема.
Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.

Теорема.
Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала



Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем касательную к нему при $x=x_0$. Тогда при приращении аргумента Δx приращение функции Δy равно длине отрезка BD, а приращение ординаты касательной $f'(x_0)\Delta x = dy$ равно длине отрезка CD. Следовательно, **дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.**

Линеаризация функции.

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при приближенных вычислениях можно заменять Δy на dy, то есть считать, что $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f`(x_0)(x - x_0)$. При этом функция $f(x)$ для значений x, близких к x_0, приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется **линеаризацией** функции.
Пример.
Найдем приближенное значение $\sqrt{1{,}02}$. Пусть $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02.$
Тогда

$$f(1 + 0{,}02) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}02 = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}02 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01.$$

Свойства производной (правила дифференцирования). Производная сложной функции. Таблица производных.

Правила дифференцирования.

Пусть при рассматриваемых значениях x существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть эти функции являются дифференцируемыми при данных значениях аргумента. Сформулируем и докажем некоторые свойства производных.

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$

2. $(kf(x))' = kf'(x)$, ***где k=const.***

3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4. ***Если g(x)≠0, то*** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Производная сложной функции.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет при некотором значении x производную $u_x' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y_u' = f'(u)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже имеет при данном значении x производную, равную

$$y'(x) = f'(u)\cdot u'(x).$$

Производные основных элементарных функций.

Используя полученные формулы и свойства производных, найдем производные основных элементарных функций.

1. Если $f(x)=C=\text{const}$, то $\Delta C=0$, поэтому $C'=0$.

2. $y=x^n$, где n – натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

Следовательно, $y' = nx^{n-1}$.

3. $y = \sin x$, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos x = \cos x.$

4. $y = \cos x$, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x) = -2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x = -\sin x.$

5. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

6. Аналогично можно получить формулу $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x\ln a$ (см. 2-е следствие из второго замечательного предела).

8. $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \dfrac{1}{x}$ (см. 1-е следствие из второго замечательного предела).

9. По формуле производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(arcctgx)' = (\frac{\pi}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таблица основных производных:

1. ***$(u^{\mu})' = \mu u^{\mu-1} u'$ ($\mu \in R$)***
2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
3. ***$(e^u)' = e^u u'$***
4. ***$(\log_a u)' = u'/(u \ln a)$***
5. ***$(\ln u)' = u'/u$***
6. ***$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$***
7. ***$(\cos u)' = - \sin u \cdot u'$***
8. ***$(tg\, u)' = u' / \cos^2 u$***
9. $(ctg\, u)' = - u' / \sin^2 u$
10. $(\arcsin u)' = u' / \sqrt{1-u^2}$
11. ***$(\arccos u)' = - u' / \sqrt{1-u^2}$***
12. ***$(arctg\, u)' = u'/(1 + u^2)$***
13. ***$(arcctg\, u)' = - u'/(1 + u^2)$,***
где $u=f(x)$.

Примеры нахождения производных функций.

1. Вычислить производную функции $y=(3x^3-2x+1)\cdot \sin x$.

Решение.
По правилу 3 имеем: $y'=(3x^3-2x+1)'\cdot\sin x+(3x^3-2x+1)\cdot(\sin x)'= (9x^2-2)\sin x + (3x^3-2x+1)\cos x$.

2.Найти производную функции $y = tg\, x + \frac{e^x}{1+x}$.

Решение.

Используя правила дифференцирования суммы и частного, получим: $y'=(tgx + \frac{e^x}{1+x})' = (tgx)' +$

$+(\frac{e^x}{1+x})' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x)-(1+x)'e^x}{(1+x)^2} = = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

3.Найти производную сложной функции $y= u^2 + 3\sqrt{u} - 1$, $u=x^4 +1$.

Решение.

По правилу дифференцирования сложной функции, получим: $y'_x =y'_u u'_x =(u^2 + 3\sqrt{u} - 1)'_u\times$

$\times (x^4 +1)'_x = (2u+ \frac{3}{2\sqrt{u}}) \cdot 4x^3$. Так как $u=x^4+1$, то $(2 x^4 +2+ \frac{3}{2\sqrt{x^4+1}}) \cdot 4x^3$.

4. Найти производную функции $y= e^{x^2}$.

Решение.

Представим функцию $y= e^{x^2}$ в виде суперпозиции двух функций: $y = e^u$ и $u = x^2$. Имеем: $y'_x =y'_u u'_x$ $= (e^u)'_u(x^2)'_x = e^u \cdot 2x$. Подставляя x^2 вместо u, получим $y=2x\, e^{x^2}$.

5. Найти производную функции $y=\ln \sin x$.

Решение.

Обозначим $u=\sin x$, тогда производная сложной функции $y=\ln u$ вычисляется по формуле $y' =$ $=(\ln u)'_u(\sin x)'_x= \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$.

6.Найти производную функции $y=\sqrt{tg \frac{1}{2} x}$.

Решение.
Случай сложной функции, полученной в результате нескольких суперпозиций, исчерпывается последовательным применением правила дифференцирования сложной функции:

$$y'_x = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x/2}}\cdot(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)'_x = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x/2}}\cdot\sec^2\frac{1}{2}x\cdot(\frac{1}{2}x)'_x = \frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x/2}}.$$

Производные высших порядков.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$. В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию x. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции $f(x)$. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом $f`(x)$ будем называть производной первого порядка.

Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной) от функции $f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n$-1)-й производной.

Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y'''.

Пример.

Найдем производную 3-го порядка от функции $y=x^3-5x^2+3x+12$.

$y'=3x^2-10x+3$, $y''=(y')'=6x-10$, $y'''=(y'')'=6$.

Условия возрастания и убывания функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[a,b]$, если $\forall x_1, x_2 \in [ab]$ таких, что $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема.

Если функция $f(x)$, дифференцируемая на $[a,b]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$ на $[a,b]$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a,b]$.

Замечание 1. Аналогичную теорему можно доказать и для убывающей функции: Если $f(x)$ убывает на $[a,b]$, то $f'(x) \leq 0$ на $[a,b]$. Если $f'(x) < 0$ на (a,b), то $f(x)$ убывает на $[a,b]$.

Замечание 2. Геометрический смысл доказанной теоремы: если функция возрастает на отрезке $[a,b]$, то касательная к ее графику во всех точках на этом отрезке образует с осью Ox острый угол (или горизонтальна). Если же функция убывает на рассматриваемом отрезке, то касательная к графику этой функции образует с осью Ox тупой угол (или в некоторых точках параллельна оси Ox).

Необходимое условие экстремума.

Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0.

Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Теорема (необходимое условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Примеры.

1.Функция $y = x^2$ имеет минимум при $x = 0$, причем $(x^2)' = 2x = 0$ при $x = 0$.

2. Минимум функции $y = |x|$ достигается при $x = 0$, причем производная в этой точке не существует.

Замечание. Отметим еще раз, что теорема дает **необходимое,** но не **достаточное** условие экстремума, то есть не во всех точках, в которых $f'(x) = 0$, функция достигает экстремума.

Пример. У функции $y = x^3$ $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако функция монотонно возрастает во всей области определения.

Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка x_0 называется **критической точкой** функции. Теорема означает, что все точки экстремума находятся в множестве критических точек функции.

Достаточные условия экстремума.

Теорема.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума;
2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума;
3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0, эта точка не является точкой экстремума.

Теорема.

Пусть $f'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Вывод: проверить наличие экстремума в критической точке можно тремя способами:

1) убедиться, что $f\,'(x)$ меняет знак при $x = x_0$;
2) определить знак $f\,''(x_0)$;
3) если $f\,''(x_0) = 0$, исследовать порядок и знак производной, не обращающейся в 0 в рассматриваемой точке.

Пример.

Определим тип экстремума функции $y = x^3 - 3x + 7$ при $x = 1$. Точка $x = 1$ является критической, так как $y' = 3x^2 - 3x = 0$ при $x = 1$. Так как при $x < 1$ $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$, $x = 1$ – точка минимума. Можно было установить этот факт и с помощью второй производной: $y'' = 6x - 3 = 3 > 0$ при $x = 1$. Следовательно, функция в этой точке достигает минимума.

Наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке [a,b]. Тогда она непрерывна на нем, и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если $f(x)$ имеет на [a,b] конечное число критических точек, то ее наибольшее значение будет либо одним из ее максимумов (а именно, наибольшим максимумом), либо будет достигаться в одной из конечных точек отрезка. То же можно сказать и о наименьшем значении. Из сказанного следует, что поиск наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке можно проводить по следующей схеме:

1) найти критические точки функции, принадлежащие данному отрезку;
2) вычислить значения функции в точках a и b, а также в найденных критических точках. Наименьшее из полученных чисел будет наименьшим значением функции на данном отрезке, а наибольшее – ее наибольшим значением на нем.

Пример.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 15$ на отрезке [-4, 4]. $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0$ при $x = -3$ и $x = 1$. При этом обе найденные критические точки принадлежат данному отрезку. Вычислим значения функции при $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$ и $x = 4$.

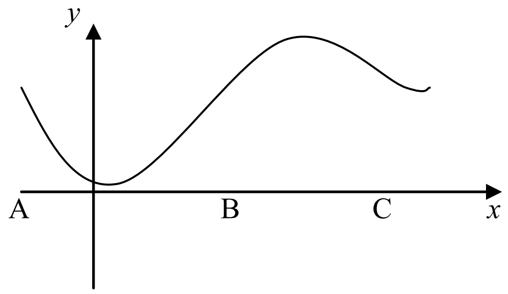
x	-4	-3	1	4
y	5	12	-20	61

Таким образом, наибольшее значение функции на рассматриваемом отрезке равно 61 и принимается на его правой границе, а наименьшее равно –20 и достигается в точке минимума внутри отрезка.

Исследование выпуклости функции. Точки перегиба, их нахождение. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Выпуклость и вогнутость кривой.

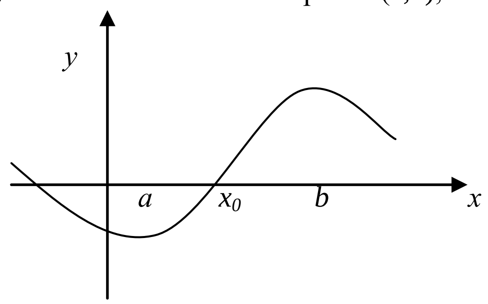
Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.
Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.



Например, кривая, изображенная на рисунке, выпукла на интервале (ВС) и вогнута на интервале (АВ).

Теорема.

Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (a,b), то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (a,b), то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале.



Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Замечание. Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

Теорема (необходимое условие точки перегиба).

Если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема (достаточное условие точек перегиба).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то x_0 – точка перегиба.

Замечание. Можно доказать, что если в условиях теоремы критическая точка не является точкой экстремума, то она является точкой перегиба.

Пример. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $y = x^3 - 6x^2 + x - 12$. $y' = 3x^2 - 12x + 1$, $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ при $x = 2$, $y'' < 0$ при $x < 2$, $y'' > 0$ при $x > 2$. Таким образом, график функции является выпуклым при $x < 2$, вогнутым при $x > 2$, а $x = 2$ – точка его перегиба.

Асимптоты.

Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменой точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Рассмотрим три вида асимптот и определим способы их нахождения.

1. **Вертикальные асимптоты** – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен. Пример. Вертикальной асимптотой графика функции $y = 1/x$ является прямая $x = 0$, то есть ось ординат.

2. **Горизонтальные асимптоты** – прямые вида $y = a$. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ конечен, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.

3. **Наклонные асимптоты** – прямые вида $y = kx + b$. Найдем k и b. Поскольку при $x \to \infty$ $f(x) \approx kx + b$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, если этот предел существует, конечен и не равен нулю. Однако даже при выполнении этих условий наклонная асимптота может не существовать. Для ее существования требуется, чтобы имелся конечный предел при $x \to \infty$ разности $f(x) - kx$. Этот предел будет равен b, так как при $x \to \infty$ $f(x) - kx \approx b$.

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

1. Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы 2-го рода при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, причем , односторонние пределы в этих точках бесконечны. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ - вертикальные асимптоты графика.

2. Функция $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 1$, то есть $x = 1$ – вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, поэтому горизонтальных асимптот график не имеет. Проверим наличие наклонных асимптот. Для этого вычислим, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = 1 = k.$ Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1 = b.$ Заметим, что оба предела не зависят от знака бесконечности, поэтому прямая $y = x + 1$ является асимптотой графика на обоих концах оси Ox.

Общая схема исследования функции.

Результаты, полученные при изучении различных аспектов поведения функции, позволяют сформулировать общую схему ее исследования с целью построения качественного графика, отражающего характерные особенности поведения данной функции. Для этого требуется определить:

1) область определения функции и ее поведение на границах области определения (найти соответствующие односторонние пределы или пределы на бесконечности);

2) четность и периодичность функции;

3) интервалы непрерывности и точки разрыва (указав при этом тип разрыва);

4) нули функции (т.е. значения x , при которых $f(x) = 0$) и области постоянства знака;

5) интервалы монотонности и экстремумы;

6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

7) асимптоты графика функции.

Заметим, что подробный ответ на первый вопрос фактически содержит ответы на второй и отчасти на седьмой вопросы. Действительно, если в область определения не входят отдельно расположенные точки и найдены односторонние пределы функции в этих точках, то тем самым указан характер разрывов. В частности, если какой-либо из этих односторонних пределов бесконечен, через точку разрыва (или через соответствующую границу области определения) проходит вертикальная асимптота. Если область определения функции не ограничена слева или справа и на бесконечности соответствующего знака существует конечный предел функции, то график имеет на указанном конце оси Ox горизонтальную асимптоту.

Пример. Исследуем функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построим ее график.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Поведение на границах:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,\ \lim_{x\to1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,\ \lim_{x\to1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x-1} \neq \pm f(x)$, следовательно, функция не является четной или нечетной (в этом случае говорят, что рассматриваемая функция общего типа). Функция не является периодической, так как периодическая функция, не равная константе, не может иметь предела на бесконечности.

3. Так как функция является элементарной, она непрерывна во всей области определения, т.е. промежутки непрерывности $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Из ответа на первый вопрос следует, что $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода (так как односторонние пределы в этой точке бесконечны).

4. $f(x) \neq 0$ ни при каких значениях x (следовательно, график функции не пересекает ось Ox). $f(x) < 0$ при $x < 1$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

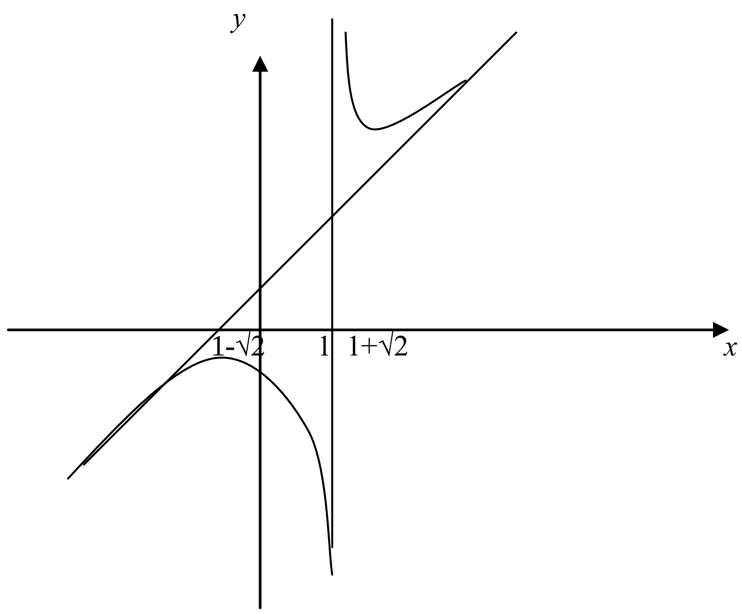
5. Для ответа на этот вопрос найдем производную данной функции.
$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$ при $x = 1 \pm \sqrt{2}$. $f'(x) < 0$ при $x \in (1-\sqrt{2};1) \cup (1;1+\sqrt{2})$ - интервалы убывания функции; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;1-\sqrt{2}) \in (1+\sqrt{2};+\infty)$ - интервалы возрастания функции. При $x = 1-\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1-\sqrt{2}$ - точка максимума. При $x = 1+\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x = 1+\sqrt{2}$ - точка минимума.

6. $f''(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{4}{(x-1)^3} \neq 0$ ни при каких значениях x.

Следовательно, функция не имеет точек перегиба. $f''(x) < 0$ при $x < 1$, $f''(x) > 0$ при $x > 1$, поэтому на интервале $(-\infty;1)$ функция выпукла, а на интервале $(1;+\infty)$ - вогнута.

7. При ответе на первый вопрос показано, что $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции. Там же выяснено, что при $x \to \infty$ функция не имеет конечного предела, следовательно, не имеет и горизонтальных асимптот. Наклонная асимптота $y = x + 1$ найдена в примере 2.

Построим график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ на основе результатов проведенного исследования.



Варианты индивидуальных заданий № 2.

Задача 1.

Найти производную функции:

1. $y = x\arccos x - \sqrt{4-x^2} + \dfrac{\sin x}{\ln(2x-1)}$

2. $y = 4\arccos\dfrac{x}{2} + (\ln\sin(x+\dfrac{1}{x}))\sqrt{1-x^2}$

3. $y = \dfrac{a^x - e^{-x}}{a^x + e^{-x}} + \sin\sqrt{x}$

4. $y = \ln^2(1+\cos\sqrt[3]{x}) + x^2e^{-2x}$

5. $y = \sin x^2 e^{\cos x} + \arcsin\sqrt{1-x^2}$

6. $y = arctg\,\frac{x+1}{x-1} - x^3 \ln\frac{1}{x}$

7. $y = (x - \cos x)\ln(x - \cos x) + \arcsin\sqrt{1-x^2}$

8. $y = x(\ln x + \sin\ln x) + \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

9. $y = \frac{1+\sqrt{\ln x}}{1-\sqrt{\ln x}} + e\sqrt[3]{\ln x}$

10. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

11. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}) + (1-2x)^{100}$

12. $y = \ln\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} + 2^x 3^x$

13. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1-\sqrt{x}}) + x^2 \lg x$

14. $y = \sin(\cos\frac{1}{x}) + \ln(2x^2 + 3x + 2)$

15. $y = \cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + (1 + \ln\frac{1}{x})^5$

16. $y = \frac{x\arccos x}{1-x^2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$

17. $y = \frac{1+xarctgx}{1+x^2} + e^{2x}(x^2 + x - 1)$

18. $y = \frac{1}{x^2}\,arctg + \frac{1}{x} + \sqrt[3]{2x^2 + x - 1}$

19. $y = arcctge^x(e^{2x}+1)^2 - \ln^2(1+\sin x)$

20. $y = e^{arctg\sqrt{x}} + x\sin(x^2+1)$

21. $y = \ln tg\,\frac{x}{2} + \sqrt[5]{\frac{1}{x+1}}$

22. $y = \sin arctg(\sin x) + \ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2})$

23. $y = 6\arcsin\frac{x+1}{2} + 3\frac{\ln x}{x}$

24. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}} + arctg\frac{1-x}{1+x}$

25. $y = \ln(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) + \sqrt{x^2+1}$

26. $y = \cos(x - \cos x) + \sqrt{\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}}$

27. $y = \frac{arctgx}{\ln^3 x} - \sin\sqrt{x+1}$

28. $y = \ln(\sin x\sqrt{4-x^2}) + arctg\frac{x-1}{x+1}$

29. $y = \ln\frac{1+tgx}{ctg^2 x} + 2\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}$

30. $y = \ln ctg\frac{x}{2} + \sqrt[5]{\frac{1}{x-2}}$

Задача 2.

Вычислить приближенное значение функции при x=1.002:

1. $y = \sqrt[3]{x^2+7}$

2. $y = \frac{1}{x^3+2x-1}$

3. $y = \sqrt[4]{17x^2-1}$

4. $y = \frac{2x}{2x^2-4x+1}$

5. $y = \sqrt[3]{2x^2+6}$

6. $y = \sqrt[5]{x^4+32x}$

16. $y = \sqrt[5]{4x^6-3}$

17. $y = \frac{x^2-3}{x^3-3x+5}$

18. $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2+8}}$

19. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$

20. $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+3}{4}}$

21. $y = \frac{5x^2-4}{x^3+2x-1}$

7. $y=\frac{\sqrt{x^2+3}}{3x-1}$

8. $y=\sqrt{x^3+7}$

9. $y=\frac{\sqrt{5x-1}}{x}$

10. $y=\sqrt{1-9x^2}$

11. $y=\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

12. $y=\sqrt{30x^2-3}$

13. $y=\frac{8x^2+3}{2x^3-x+8}$

14. $y=\frac{12x^3-1}{3x^2+x+1}$

15. $y=\sqrt[3]{2x^2+30x}$

22. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-9}$

23. $y=\frac{x^3+8x+1}{x^2-1}$

24. $y=\sqrt{x^3+2x-2}$

25. $y=\sqrt{x^3+2x-2}$

26. $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}+2x+6}$

27. $y=\frac{8x-5}{x^2-2x+4}$

28. $y=x^4-2x+4$

29. $y=\frac{3x^2-1}{x^3+2x+1}$

30. $y=\sqrt{x^3+2x-2}$

Задача 3.

Исследовать функцию и построить её график:

1. $y=2x^3+3x^2-12x$

2. $y=2x^3-3x^2-12x$

3. $y=x^3+3x^2-9x$

4. $y=x^3-3x^2-9x$

5. $y=2x^3+3x^2-56x$

6. $y=2x^3-3x^2-36x$

7. $y=2x^3-9x^2+12x$

8. $y=2x^3+9x^2+12x$

9. $y=x^3-6x^2+9x$

16. $y=2x^3-3x^2-36x$

17. $y=2x^3-9x^2+12x$

18. $y=2x^3+9x^2+12x$

19. $y=x^3-6x^2+9x$

20. $y=x^3+6x^2+9x$

21. $y=2x^3+3x^2-12x$

22. $y=2x^3-3x^2-12x$

23. $y=x^3+3x^2-9x$

24. $y=x^3-3x^2-9x$

10. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

11. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

12. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

13. $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

14. $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$

15. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

25. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

26. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

27. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

28. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$

29. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

30. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

(*) Задача 4.

Провести полное исследование и построить график функции

1. $y = x \cdot e^{x}$

2. $y = x - \sqrt{x}$

3. $y = x \cdot \ln x$

4. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

5. $y = \dfrac{x}{x^{2}+1}$

6. $y = \dfrac{x}{(x-4)(x+5)}$

7. $y = \dfrac{e^{x}}{x}$

8. $y = x^{2} - \sqrt{x}$

9. $y = x^{2} \cdot \ln x$

10. $y = \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

11. $y = \dfrac{x}{x^{2}-1}$

12. $y = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$

13. $y = x \cdot e^{x}$

14. $y = x - \sqrt[3]{x}$

15. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

16. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

17. $y = x^{2} + \dfrac{1}{x^{2}}$

18. $y = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

19. $y = x^{2} \cdot e^{-x}$

20. $y = x^{2} - \sqrt[3]{x}$

21. $y = \dfrac{2x}{(x-4)(x+5)}$

22. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

23. $y = x^{2} + \dfrac{1}{x}$

24. $y = \dfrac{x}{x^{2}-9}$

25. $y = (x+1) - e^{x+2}$

26. $y = \sqrt[3]{x^{2}} - x$

27. $y = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$

28. $y = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

29. $y = x + \dfrac{1}{x}$

30. $y = \dfrac{3x}{(x-4)(x+2)}$

III Интегральное исчисление.

Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.

Функция F(x), дифференцируемая в данном промежутке X, называется **первообразной** *для* функции f(x), или интегралом от f(x), если для всякого $x \in X$ справедливо равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Нахождение всех первообразных для данной функции называется ее **интегрированием. Неопределенным интегралом функции** f(x) на данном промежутке X называется множество всех первообразных функций для функции f(x); обозначение -

$$\int f(x)\,dx.$$

Если F(x) - какая-нибудь первообразная для функции f(x), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Непосредственно из определения получаем основные свойства неопределенного интеграла и список табличных интегралов:

1. $d\int f(x)=f(x)dx$,

2. $\int df(x)=f(x)+C$,

3. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ $(a=const)$,

4. $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\mu}\,dx = x^{\mu+1}/(\mu + 1) + C$ $(\mu \neq -1)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\,dx = \cos x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = - \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \mathrm{ctg}\, x + C$.

Для интегрирования многих функций применяют **метод замены переменной**, или **подстановки**, позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на $[\alpha, \beta]$, функция z=g(x) имеет на [a,b] непрерывную производную и $\alpha \le g(x) \le \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку z=g(x).

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x).$$

Примеры:

1. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int (\ln\ x)' \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$;

2. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(\sin x)' dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \mathrm{arctg}\ z + C = \mathrm{arctg}(\sin x) + C$.

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

d(uv)= udv + vdu или udv = d(uv) -vdu.

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило **интегрирования по частям.** Оно приводит интегрирование выражения udv=uv'dx к интегрированию выражения vdu=vu'dx.

Пусть, например, требуется найти ∫ x cosx dx. Положим u = x, dv = cos x dx, так что du=dx, v=sinx. Тогда

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\, dx,\ \int x^k \sin bx\, dx,\ \int x^k \cos bx\, dx,\ \int x^k e^{ax}\, dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Определенный интеграл.

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] определена функция f(x). Разобьем отрезок [a, b] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется **интегральной суммой**, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется **определенным интегралом** функции f(x) от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функция f(x) в этом случае называется интегрируемой на отрезке [a, b], числа a и b носят название **нижнего** и **верхнего** предела интеграла.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$;

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, (k = const, k∈ **R**);

5. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $(\xi \in [a,b])$.

Последнее свойство называется **теоремой о среднем значении**.

Пусть f(x) непрерывна на [a, b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

и имеет место **формула Ньютона-Лейбница**, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Примеры на интегрирование функций.

1. Найти $\int dx/(x+2)$.

Решение.

Обозначим $t=x+2$, тогда $dx=dt$, $\int dx/(x+2) = \int dt/t = \ln|t|+C = \ln|x+2|+C$.

2. Найти $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Решение.

$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \sin x/\cos x\, dx = -\int d(\cos x)/\cos x$. Пусть $t=\cos x$, тогда $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int dt/t =$ $-\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C$.

3. Найти $\int dx/\sin x$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int tg\frac{x}{2}dx + \frac{1}{2}\int ctg\frac{x}{2}dx = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

4. Найти $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение.

Обозначим $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$. Тогда $du = dx/(x^2+1)$, $v=x$, откуда $\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x\, dx/(x^2+1)$ $= x \operatorname{arctg} x + 1/2 \ln(x^2+1) + C$; так как $\int x\, dx/(x^2+1) = 1/2 \int d(x^2+1)/(x^2+1) = 1/2 \ln(x^2+1) + C$.

5. Найти $\int \ln x\, dx$.

Решение.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим: $u=\ln x$, $dv=dx$, $du= 1/x\, dx$, $v=x$.

Тогда $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\, 1/x\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

6. Найти $\int e^x \sin x\, dx$.

Решение.

Обозначим $u = e^x$, $dv = \sin x\, dx$, тогда $du = e^x dx$, $v=\int \sin x\, dx= - \cos x \Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = - e^x \cos x +$ $+ \int e^x \cos x\, dx$. Интеграл $\int e^x \cos x\, dx$ также интегрируем по частям: $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx \Rightarrow du=e^x dx$, $v=\sin x$. Имеем: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$. Получили соотношение $\int e^x \sin x\, dx = - e^x \cos x +$ $+ e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$, откуда $2 \int e^x \sin x\, dx = - e^x \cos x + e^x \sin x + C$.

7. Найти $J = \int \cos(\ln x)dx/x$.

Решение.

Так как $dx/x = d(\ln x)$, то $J= \int \cos(\ln x)d(\ln x)$. Заменяя $\ln x$ через t, приходим к табличному интегралу $J = \int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$.

8. Найти $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

Решение.

Учитывая, что $\frac{dx}{x}$ = d(ln x), производим подстановку ln x = t.

Тогда J $\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + c = \arcsin\frac{\ln x}{2} + c$.

9. Вычислить интеграл J = $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx$.

Решение.

Имеем: $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$. Поэтому $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx =$

$= \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi}|\sin x|\,dx = \sqrt{2}(\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi}\sin x\,dx + \ \dots\ + \int\limits_{99\pi}^{100\pi}\sin x\,dx) =$

$= \sqrt{2}(2+2+2+\ \dots\ +2) = 200\sqrt{2}$.

Вычисление площадей плоских фигур.

С геометрической точки зрения интегральная сумма представляет собой (при *f(x)* ≥ 0) сумму площадей прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Переходя к пределу при |τ|→0, получаем, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ представляет собой площадь так называемой криволинейной трапеции *aABb*, то есть фигуры, ограниченной частью графика функции

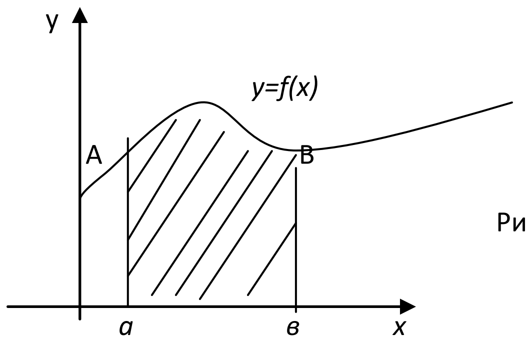


Рис. 1

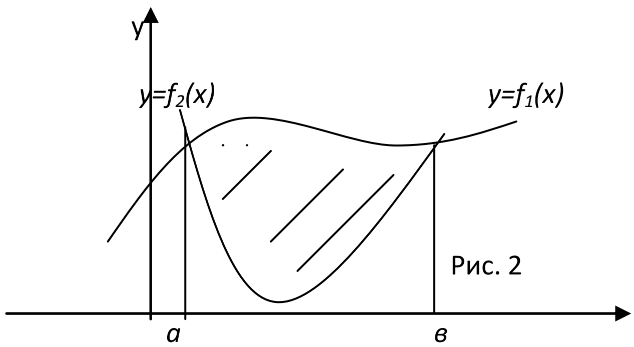


Рис. 2

f(x) от *x = a* до *x = b* и отрезками прямых *x = a*, *x = b* и *y* = 0 (рис. 1): $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций: $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (рис. 2), то ее можно рассматривать как разность площадей двух криволинейных трапеций: верхней границей первой из них служит график функции $f_2(x)$, а второй – $f_1(x)$. Таким образом,

$$S = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x - 5$ и $y = x - 5$.

Найдем абсциссы точек пересечения указанных графиков, то есть корни уравнения $x^2 - 3x - 5 =$

$=x-5$. $x^2 - 4x = 0$: $x_1 = a = 0$, $x_2 = b = 4$. Таким образом, найдены пределы интегрирования. Так как на интервале [0,4] прямая $y = x - 5$ проходит выше параболы $y = x^2 - 3x - 5$,то:

$$S = \int_0^4 (x-5-(x^2-3x-5))dx = \int_0^4 (4x-x^2)dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Варианты индивидуальных заданий № 3.

Задача 1

Найти неопределенный интеграл методом подстановки

1. $\int \sqrt[5]{(2x-1)^2}dx$

2. $\int \frac{dx}{(5x-1)^3}$

3. $\int 3\cdot\sqrt[3]{5-2x}dx$

4. $\int \frac{4dx}{\sqrt[4]{3x-6}}$

5. $\int \frac{3dx}{4-5x}$

6. $\int \frac{4dx}{\cos^2(3-2x)}$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2(4-5x)}$

8. $\int 3\cdot e^{-\frac{1}{2}x+5}dx$

9. $\int 3\cdot 5^{-2x-4}dx$

10. $\int x^2\sqrt{1-3x^3}dx$

11. $\int \frac{3\cos xdx}{1-2\sin x}$

12. $\int \frac{3\cos xdx}{\cos^2 x}$

13. $\int \frac{4\cos xdx}{\sin^3 x}$

14. $\int 3x\sqrt{x^2-1}dx$

15. $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$

16. $\int 2e^x\cdot\sqrt[3]{1+e^x}dx$

17. $\int 3x\cdot e^{x^2}\sin xdx$

18. $\int 3\cdot e^{\cos x}\sin xdx$

19. $\int \frac{3\cdot e^x dx}{(1+e^x)^2}$

20. $\int 2\sin^3 x\cos xdx$

21. $\int x\sin 3x^2dx$

22. $\int \frac{3e^x dx}{\sqrt{4-e^x}}$

23. $\int \frac{4x-1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

24. $\int \frac{3dx}{(2x+1)^2}$

25. $\int \frac{4dx}{5-6x}$

26. $\int 2x\cdot\sqrt[3]{2+3x^2}dx$

27. $\int 2\cdot e^{-3x+4}dx$

28. $\int 4x \cdot 5^{x^2+5} dx$

29. $\int \frac{3xdx}{(2x^2+1)^2}$

30. $\int \frac{dx}{\cos^2(4x+5)}$

(*) Задача 2.

Найти неопределенный интеграл по частям:

1. $\int x^2 \ln x dx$

2. $\int x arctg x dx$

3. $\int x e^x dx$

4. $\int \arcsin x dx$

5. $\int \arccos x dx$

6. $\int x \sin 2x dx$

7. $\int x \cos 2x dx$

8. $\int x^2 \cos x dx$

9. $\int 2x \cos 3x dx$

10. $\int 3x \sin 3x dx$

11. $\int x \cos 4x dx$

12. $\int x \sin x dx$

13. $\int 3x \cos tgx dx$

14. $\int x \ln x dx$

15. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

16. $\int 4x 3^x dx$

17. $\int x \cos 3x dx$

18. $\int 2x \sin x dx$

19. $\int 4x e^{3x} dx$

20. $\int 3x e^{2x} dx$

21. $\int x \sin 3x dx$

22. $\int (x 2^x) dx$

23. $\int x e^{2x} dx$

24. $\int 3x \ln x dx$

25. $\int 2x \cos 2x dx$

26. $\int x e^{3x} dx$

27. $\int 2x 5^x dx$

28. $\int 3x \sin 2x dx$

29. $\int x \cos 2x dx$

30. $\int x e^{4x} dx$

Задача 3.

Вычислить определенный интеграл методом подстановки:

1. $\int_{-1}^{1}\frac{2dx}{3x-6}$

2. $\int_{-4}^{-2}3\sqrt{5-2x}dx$

3. $\int_{2}^{4}\frac{3dx}{4-5x}$

4. $\int_{1}^{2}x^2\sqrt[3]{1-3x^3}dx$

5. $\int_{1}^{2}\frac{3dx}{(2x-1)^2}$

6. $\int_{1}^{2}\frac{2dx}{3-6x}$

7. $\int_{1}^{2}4x5^{x^2+5}dx$

8. $\int_{0}^{\pi/4}2e^{\cos x}\sin xdx$

9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}3\sin^2 x\cos xdx$

10. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin xdx}{1+\cos x}$

11. $\int_{1}^{2}(3-5^{3x+4})dx$

12. $\int_{0}^{2}\frac{3xdx}{1+2x}$

13. $\int_{2}^{4}\frac{2dx}{\sqrt[4]{2x-1}}$

16. $\int_{0}^{2}\frac{2dx}{3x+1}$

17. $\int_{1}^{2}\frac{2dx}{\sqrt[4]{2x-4}}$

18. $\int_{1}^{2}2\sqrt[3]{1+4x}dx$

19. $\int_{1}^{2}\frac{2xdx}{1-3x}$

20. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}(3-\sin^x\cos x)dx$

21. $\int_{0}^{\pi/3}\sin^2 x\cos xdx$

22. $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{2dx}{\cos^2 2x}$

23. $\int_{\pi/12}^{\pi/3}\frac{2dx}{3\cos^2 3x}$

24. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{3+2x^3}$

25. $\int_{0}^{1}\frac{3x^2dx}{1+2x^3}$

26. $\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sin xdx}{\cos^4 x}$

27. $\int_{0}^{\pi/2}3\sin x\cos^2 xdx$

28. $\int_{0}^{1}\frac{e^xdx}{e^x+3}$

14. $\int_{1}^{2} \frac{2dx}{(3x-2)^2}$

15. $\int_{2}^{3} 2x\sqrt{x^2-1}dx$

29. $\int_{1}^{2} (x^2+2)^3 xdx$

30. $\int_{0}^{3/2\pi} \cos\frac{x}{3}dx$

Задача 4.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, сделать рисунок:

1. $y=\frac{1}{3}x^2-x,\ \ y=0$

2. $y=2x-2x^2,\ \ y=0$

3. $y=x^2-4,\ \ y=0$

4. $y=-x^2+2x,\ \ y=0$

5. $y=x^2-9,\ \ y=0$

6. $y=\frac{1}{2}x^2,\ \ y=2$

7. $y=\frac{1}{9}x^2,\ \ y=1$

8. $y=-x^2,\ \ y=-4$

9. $y=x^2+2x,\ \ y=0$

10. $y=x(x-6),\ \ y=0$

11. $y=-x^2+9x,\ \ y=0$

12. $y=1-\frac{1}{16}x^2,\ \ y=0$

13. $y=-x^2-2x,\ \ y=0$

14. $y=\frac{1}{2}x^2-8,\ \ y=0$

15. $y=3x^2,\ \ y=3$

16. $y=2x^2,\ \ y=8$

17. $y=4x-2x^2,\ \ y=0$

18. $y=-3x^2,\ \ y=-12$

19. $y=2x^2-4x,\ \ y=0$

20. $y=\frac{1}{3}x^2+2x,\ \ y=0$

21. $y=-x^2+4x,\ \ y=0$

22. $y=-x^2+4,\ \ y=0$

23. $y=x^2-1,\ \ y=0$

24. $y=-\frac{1}{9}x^2+1,\ \ y=0$

25. $y=x^2-5,\ \ y=0$

26. $y=\frac{1}{2}x^2-2x,\ \ y=0$

27. $y=2x^2-2,\ \ y=0$

28. $y=-x^2+3,\ \ y=0$

29. $y=3x(x+3),\ \ y=0$

30. $y=4x(2-x),\ \ y=0$

IV Векторы на плоскости и в пространстве.

1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение.

Вектором называется направленный отрезок.

Обозначения: **a,** $\vec{a}$**,** $\overrightarrow{AB}$**.**

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

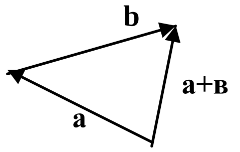
Вектор называется нулевым, если его начальная и конечная точки совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину (модуль) и одинаковое направление.

Замечание. Таким образом, мы изучаем так называемые **свободные** векторы, начальная точка которых может быть выбрана произвольно. Векторы, для которых важна точка приложения, называются присоединенными (связанными) и используются в некоторых разделах физики.

Линейные операции над векторами.

Суммой *a* + *b* векторов ***a*** и ***b*** называется вектор, идущий из начала вектора ***a*** в конец вектора ***b***, если начало вектора ***b*** совпадает с концом вектора ***a***.

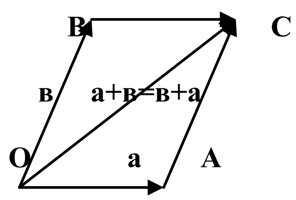


Замечание. Такое правило сложения векторов называют **правилом треугольника.**

Свойства сложения.

1.*a* + *b* = *b* + *a*.

Доказательство. Приложим векторы ***a*** и ***b*** к общему началу и рассмотрим параллелограмм АОВС. Из определения и треугольника ОВС следует, что **ОС=*b*+*a*,** а из треугольника

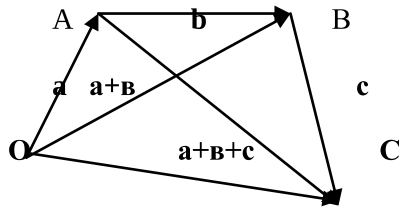


ОАС – **ОС=*a*+*b*.** Свойство 1 доказано.

Замечание. При этом сформулировано еще одно правило сложения векторов – правило параллелограмма: сумма векторов ***a*** и ***b*** есть диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах.

2. *(a*+*b)*+*c*=*a*+*(b*+*c).*

Доказательство. Из рисунка видно, что



$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$=(OA+AB)+BC=OB+BC=OC,

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$=OA+(AB+BC)=OA+AC=OC.

Свойство 2 доказано.

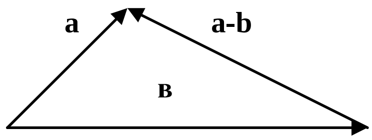
3. Для любого вектора ***a*** существует нулевой вектор **O** такой, что ***a*+O=a**.

Доказательство этого свойства следует из определения сложения.

3.Для каждого вектора ***a*** существует противоположный ему вектор $\boldsymbol{a}'$ такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\mathbf{O}$.

Доказательство. Достаточно определить $\boldsymbol{a}'$ как вектор, коллинеарный вектору ***a***, имеющий одинаковую с ним длину и противоположное направление.

Разностью *a – b* векторов ***a*** и ***b*** называется такой вектор ***c***, который в сумме с вектором ***b*** дает вектор ***a***.



Произведением $k\boldsymbol{a}$ вектора ***a*** на число k называется вектор ***b***, коллинеарный вектору ***a***, имеющий модуль, равный $|k||\boldsymbol{a}|$, и направление, совпадающее с направлением ***a*** при $k>0$ и противоположное ***a*** при $k<0$.

Свойства умножения вектора на число:

1. $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$.

2. $(k + m)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}$.

3. $k(m\boldsymbol{a}) = (km)\boldsymbol{a}$.

Следствие. Если ненулевые векторы ***a*** и ***b*** коллинеарны, то существует такое число k, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$.

Базис и координаты вектора.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ называется выражение вида: $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 +\ldots+ k_n\boldsymbol{a}_n$,

где k_i – числа.

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если найдутся такие числа $k_1, k_2,\ldots, k_n$, не все равные нулю, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю, т.е. $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 +\ldots+ k_n\boldsymbol{a}_n = 0$.

Если же равенство возможно только при всех $k_i = 0$, векторы называются **линейно независимыми**.

Замечание 1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Замечание 2. Если среди *n* векторов какие-либо (*n*-1) линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.

Замечание 3. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Векторы называются **компланарными**, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Два линейно независимых вектора на плоскости (или три линейно независимых вектора в пространстве) образуют **базис**, если любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде их линейной комбинации. Числовые коэффициенты этой линейной комбинации называются **координатами** данного вектора в рассматриваемом базисе:

если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – базис и $\boldsymbol{d} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}$, то числа k, m, p есть координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Свойства базиса:

1. Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора – базис в пространстве.
2. Разложение данного вектора по данному базису единственно, т.е. его координаты в данном базисе определяются единственным образом.
3. При сложении двух векторов их координаты относительно любого базиса складываются.
4. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Проекцией вектора $\boldsymbol{AB}$ на ось u называется длина направленного отрезка $\mathbf{A'B'}$ оси u, где A' и B' - основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось u.

Обозначение: $пр_u\mathbf{a}$.

Свойства проекции:

1. $Пр_u\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi$, где φ – угол между **a** и осью u.
2. При сложении двух векторов их проекции на любую ось складываются.
3. При умножении вектора на число его проекция на любую ось умножается на это число.

Замечание. Свойства 2 и 3 назовем линейными свойствами проекции.

Рассмотрим декартову систему координат, базис которой образуют в пространстве три попарно ортогональных единичных вектора $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{d}$ может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$\boldsymbol{d} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}.$$

Числа X, Y, Z называются **декартовыми координатами** вектора $\boldsymbol{d}$.

Замечание 1. Декартовы координаты вектора равны его проекциям на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат.

Замечание 2. Все, что относится к координатам вектора в пространстве, можно отнести и к координатам вектора на плоскости.

Косинусы углов, образованных вектором с осями декартовой системы координат, называются его **направляющими косинусами**.

Свойства направляющих косинусов:

1. $X = |\boldsymbol{d}| \cos\alpha$, $Y = |\boldsymbol{d}| \cos\beta$, $Z = |\boldsymbol{d}| \cos\gamma$.
2. $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
3. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\varphi .$$

Обозначения скалярного произведения: ***ab*, *(ab)*, *a·b*** .

Свойства скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_a \boldsymbol{b}$.

2. $\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

3. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

4. $(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{ab})$.

5. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

6. $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$, где $\boldsymbol{a}^2$ называется скалярным квадратом вектора **а**.

7. Если векторы ***a*** и ***b*** определены своими декартовыми координатами

$$\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то $$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 .$$

8. $$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} .$$

Пример.

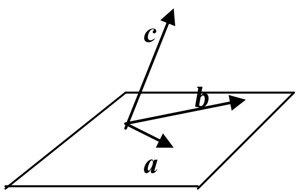
$\boldsymbol{a} = \{1, -5, 12\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, 5, 2\}$. Найдем скалярное произведение векторов ***a*** и ***b*** :

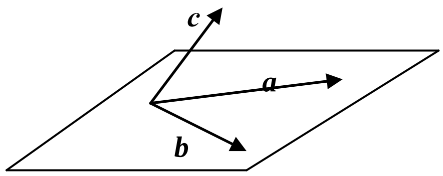
$\boldsymbol{ab} = 1\cdot1 + (-5)\cdot5 + 12\cdot2 = 1 - 25 + 24 = 0$. Следовательно, векторы ***a*** и ***b*** ортогональны.

Векторное произведение векторов, его основные свойства и геометрический смысл.

Будем называть три вектора ***a,b,c***, для которых определен порядок следования, **тройкой** (или упорядоченной тройкой) векторов.

Тройка некомпланарных векторов ***abc*** называется **правой (левой**), если после приведения к общему началу вектор ***c*** располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами ***a*** и ***b***, откуда кратчайший поворот от ***a*** к ***b*** кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).





abc – правая тройка ***abc*** – левая тройка

Замечание. В дальнейшем будем рассматривать только **правые системы координат**, т.е. системы, базисные векторы которых образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов.

Вектор ***c*** называется **векторным произведением** векторов ***a*** и ***b*,** если:

1.$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между ***a*** и ***b*.**
2.$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$.
3.Тройка векторов ***abc*** является правой.

Обозначения векторного произведения: $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Свойства векторного произведения.

1.$[\boldsymbol{ba}] = -[\boldsymbol{ab}]$.
2. $[\boldsymbol{ab}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.
3.Модуль векторного произведения $|[\boldsymbol{ab}]|$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a*** и ***b***.

Орт $\boldsymbol{e_a}$ произвольного вектора ***a*** – это вектор единичной длины, коллинеарный ***a*** и одинаково с ним направленный ($|\boldsymbol{e_a}| = 1$, $\boldsymbol{e_a} \parallel \boldsymbol{a}$).

1.$[(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = k[\boldsymbol{ab}]$.
2.$[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.

Если в декартовой системе координат $\boldsymbol{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$, то

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{в} = [\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислим векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = \{3, -4, 2\}$ и $\boldsymbol{b} = \{1, 5, 1\}$.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{в} = [\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right\} = \{-14, -1, 19\}.$$

Примеры на использование векторов при решении геометрических задач. **1**. Зная векторы **a** и **b,** на которых построен параллелограмм, выразить через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне **a**.

Решение.

Обозначим **AB**=**a, AC**=**b**, **CD**=**h**, где **CD**$\perp$**a**, D-основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону **a.** По правилу сложения векторов имеем: **b + h = AD**, **h = AD - b.** Поскольку **AD** || **a**, то **AD** = λ **a**. Найдем значение λ, используя ортогональность векторов **a** и **h**: **ah**=0 или **a**(λ **a**-**b**)=0, откуда λ = **ab** /**a**^{2}. Следовательно**,** **h** = (**ab** /**a**^{2}) **a - b**.

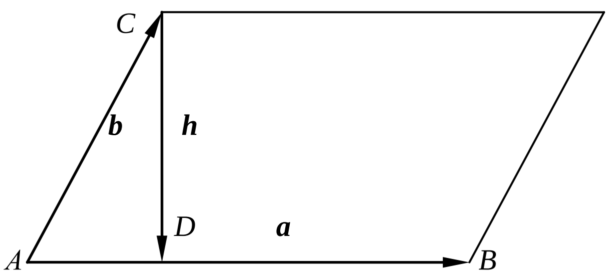


Рис. 1.

2. Найдите угол между векторами **a** = 2**m**+4**n** и **b** = **m**-**n**, где **m** и **n -** единичные векторы и угол между **m** и **n** равен 120^o.

Решение.

Имеем: cos φ = **ab**/ab, **ab =** (2**m**+4**n**) (**m**-**n**) = 2 **m**^{2} - 4**n**^{2} +2**mn** = 2 - 4+2cos120^o = - 2 + 2(-0.5) = -3; a = $=\sqrt{\bar{a}^2}$ **;** **a**^{2} = (2**m**+4**n**) (2**m**+4**n**) = 4 **m**^{2} +16**mn**+16 **n**^{2} = 4+16(-0.5)+16=12, значит a = $\sqrt{12}$. b = $\sqrt{\bar{b}^2}$ **;** **b**^{2} **=** (**m**-**n**)(**m**-**n**) = **m**^{2} -2**mn**+ **n**^{2} **=** 1-2(-0.5)+1 = 3, значит b = $\sqrt{3}$. Окончательно имеем: cos φ = $= \dfrac{-3}{\sqrt{12\cdot 3}}$ = -1/2, $\Rightarrow$ φ = 120^o.

3. Зная векторы **AB**(-3,-2,6) и **BC**(-2,4,4),вычислите длину высоты AD треугольника ABC.

Решение.

Обозначая площадь треугольника ABC через S, получим: S = 1/2 BC AD. Тогда *AD=2S/BC, BC*= $=\sqrt{\overline{BC}^2} = \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}$ = 6, S = 1/2 /***AB*** $\times$***AC***/. ***AC***=***AB***+***BC**,* значит, вектор ***AC*** имеет координаты

AC(-5,2,10). ***AB***$\times$***AC*** = $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -5 & 2 & 10 \end{vmatrix}$ = i (-20 -12) - j (30 -30) + k (- 6 - 10) =

= -16(2 $\bar{i}$ + $\bar{k}$). $|$***AB***$\times$***AC***$|$ = $\sqrt{16^2(2^2+1)}$ = 16$\sqrt{5}$; S = 8$\sqrt{5}$, откуда

AD = $\dfrac{16\sqrt{5}}{6} = \dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

2.Линии на плоскости

В аналитической геометрии **линия на плоскости** определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению F(x,y)=0. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, это уравнение имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло “куска плоскости”. Важный класс линий составляют те, для которых функция F(x,y) есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением F(x,y)=0, называется алгебраической. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, являются прямыми. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:
1. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Вектор **n**(A,B) ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_o = k\,(x - x_o),$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox, M (x_o, y_o) - некоторая точка, принадлежащая прямой.
Уравнение (2) принимает вид y = kx + b, если M (0, b) есть точка пересечения прямой с осью Oy.
3. Уравнение прямой в отрезках:

$$x/a + y/b = 1,$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку A(x_1, y_1) параллельно данному вектору **a**(m, n):

$$\frac{y-y_1}{n}=\frac{x-x_1}{m}.$$

6. Уравнение пучка прямых с центром в точке A(x_1, y_1) имеет вид:

$$y-y_1 = \lambda(x-x_1),$$

где λ - параметр пучка.
Величина угла между прямыми y = kx + b и $y = k_1 x + b_1$ задается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{k_1-k}{1+k_1k}\right|.$$

Равенство $1 + k_1 k = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.
Для того, чтобы два уравнения

$$A_1 x + B_1 y + C_1= 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны: $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2.$
Уравнения задают две различные параллельные прямые, если

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 \text{ и } B_1/B_2 \neq C_1/C_2.$$

Прямые пересекаются, если $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} есть отличные от нуля.
Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.
Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1.$$

Эллипс, заданный уравнением симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются **полуосями** эллипса.

Пусть a>b, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии c= $\sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Расстояния от точки M(x, y) эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x.$$

Если же $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy, $c=\sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r_1 = b + \varepsilon x$, $r_2 = b - \varepsilon x$.
Если $a = b$, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса a.
Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу $2a$.
Каноническое уравнение гиперболы:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

Гипербола, заданная этим уравнением, симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ox в точках $A\ (a,0)$ и $A\ (-a,0)$ - вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy. Параметр ***a*** называется **вещественной полуосью**, **b - мнимой полуосью**. Параметр $c=\sqrt{a^2 + b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы. Прямые $y = \pm b/a\ x$ называются **асимптотами** гиперболы. Расстояния от точки M(x,y) гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|,\ r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Гипербола, у которой a = b, называется **равносторонней,** ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются **сопряженными.**
Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).
Каноническое уравнение параболы имеет два вида:
1. $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ox.
2. $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Oy.
В обоих случаях $p>0$ и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.
Парабола $y^2 = 2px$ имеет фокус $F(p/2,0)$ и директрису $x = - p/2$, фокальный радиус-вектор точки M(x,y) на ней $r = x + p/2$.

Парабола $x^2 = 2py$ имеет фокус F(0, p/2) и директрису $y = - p/2$; фокальный радиус-вектор точки M(x,y) параболы равен $r = y + p/2$.

Пример 1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку A(3,1) и наклоненных к прямой $2x+3y-1 = 0$ под углом 45^o.
Решение

Будем искать уравнение прямой в виде y=kx+b. Поскольку прямая проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. 1=3k+b, $\Rightarrow$ b=1-3k. Величина угла между прямыми y= k_1 x+b_1 и y= kx+b определяется формулой tgφ = $\left|\dfrac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right|$. Так как угловой коэффициент k_1 исходной прямой 2x+3y-1=0 равен - 2/3, а угол φ = 45°, то имеем уравнение для определения k:

$$(2/3 + k)/(1 - 2/3k) = 1 \text{ или } (2/3 + k)/(1 - 2/3k) = -1.$$

Имеем два значения k: k_1 = 1/5, k_2 = -5. Находя соответствующие значения b по формуле b=1-3k, получим две искомые прямые: x - 5y + 2 = 0 и 5x + y - 16 = 0.

Пример 2. При каком значении параметра *t* прямые, заданные уравнениями 3tx-8y+1 = 0 и (1+t)x-2ty = 0, параллельны ?

Решение.

Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при *x* и *y* пропорциональны, т.е. 3t/(1+t) = -8/(-2t). Решая полученное уравнение, находим *t*: t_1 = 2, t_2 = -2/3.

Пример 3. Найти уравнение общей хорды двух окружностей: $x^2 + y^2 = 10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Решение**.**

Найдем точки пересечения окружностей, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 10 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (4 - x)^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим значения x_1 = 3, x_2 = 1. Из второго уравнения - соответствующие значения *y*: y_1 = 1, y_2 = 3. Теперь получим уравнение общей хорды, зная две точки A(3,1) и B(1,3), принадлежащие этой прямой: (y-1)/(3-1) = (x-3)/(1-3), или y+ x - 4 = 0.

Пример 4. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям $(x-3)^2 + (y-3)^2 < 8$, x > y?

Решение.

Первое неравенство системы определяет внутренность круга, не включая границу, т.е. окружность с центром в точке (3,3) и радиуса $\sqrt{8}$. Второе неравенство задает полуплоскость, определяемую прямой x = y, причем, так как неравенство строгое, точки самой прямой не принадлежат полуплоскости, а все точки ниже этой прямой принадлежат полуплоскости. Поскольку мы ищем точки, удовлетворяющие обоим неравенствам, то искомая область - внутренность полукруга.

Пример 5. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Решение.

Пусть M(c, c) - вершина квадрата, лежащая в первой четверти. Тогда сторона квадрата будет равна 2c. Т.к. точка M принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса $c^2/a^2 + c^2/b^2 = 1$, откудас = ab/ $\sqrt{a^2 + b^2}$; значит, сторона квадрата - 2ab/ $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 6. Зная уравнение асимптот гиперболы y = ± 0,5 x и одну из ее точек M(12, 3$\sqrt{3}$), составить уравнение гиперболы.

Решение.

Запишем каноническое уравнение гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями y = ± 0,5 x, значит, b/a = 1/2, откуда a=2b. Поскольку *M* - точка гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, т.е. $144/a^2 - 27/b^2 = 1$. Учитывая, что a = 2b, найдем b: $b^2=9 \Rightarrow$ b=3 и a=6. Тогда уравнение гиперболы - $x^2/36 - y^2/9 = 1$.

Пример 7.

Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром *p*, предполагая, что точка A совпадает с вершиной параболы.

Решение.

Каноническое уравнение параболы с параметром *p* имеет вид $y^2 = 2px$, вершина ее совпадает с началом координат, и парабола симметрична относительно оси абсцисс. Так как прямая AB образует с осью Ox угол в 30°, то уравнение прямой имеет вид: y = $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ x.

Следовательно, мы можем найти координаты точки B, решая систему уравнений $y^2=2px$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, откуда $x = 6p$, $y = 2\sqrt{3}p$. Значит, расстояние между точками A(0,0) и B($6p, 2\sqrt{3}p$) равно $4\sqrt{3}p$.

Варианты индивидуальных заданий №4

Задача 1.

Даны координаты вершин треугольника ABC

Определить, используя свойства векторов и уравнения прямой:

1) уравнения и длины сторон;

2) углы треугольника;

3) уравнения медиан треугольника;

4) уравнения высот треугольника;

5) площадь треугольника.

Сделать рисунок.

1.A(0;1) ,B(-1;5), C(-2;4)

2. A(-10;10), B(1;9), C(1;3)

3. A(-5;0), B(-10;6), C(-8;10)

4. A(3;8), B(9;10), C(10;7)

5. A(3;1),B(-9;6),C(-10;10)

6. A(-6;6),B(-10;7),C(-8;10)

16. A(-5;1), B(-10;-5), C(-8;9)

17. A(5;2), B(-4;2), C(-5;5)

18. A(1;9), B(8;10), C(9;6)

19. A(5;3), B(-3;2), C(-5;5)

20. A(2;-4),B(-4;9),C(-8;6)

21. A(-2;4),B(-2;-4),C(-6;-5)

7. A(-10;5),B(-9;10),C(-4;9)

22. A(4;8),B(7;-4),C(2;-7)

8. A(-2;5),B(1;1),C(6;2)

23. A(-10;-10),B(-4;5),C(6;7)

9. A(-7;-10),B(-6;-5),C(-2;-4)

24. A(0;1),B(7;-3),C(6;-6)

10. A(-6;2),B(2;10),C(6;7)

25. A(1;9),B(8;10),C(10;7)

11. A(6;7),B(6;2),C(1;1)

26. A(1;-8),B(3;1),C(7;2)

12. A(-2;-9),B(-10;5),C(-9;10)

27. A(-2;10),B(5;7),C(4;4)

13. A(-2;0),B(4;5),C(2;-8)

28. A(-3;10),B(-7;-5),C(-5;-1)

14. A(-4;-8),B(-5;2),C(-2;5)

29. A(2;-2),B(6;-8),C(4;-10)

15. A(-7;3),B(-2;2),C(-2;-1)

30. A(3;-5),B(-5;2),C(-5;7)

(*) Задача 2.

Установить тип кривой и изобразить ее на плоскости XOY:

1) $X^2 + Y^2 + AX + BY + C = 0$;

3) $KX^2 - PY^2 = L$

2) $DX^2 + MY^2 = H$;

4) $TY^2 + EX = 0$

1. A=-2, B=6,C=7, D=1,M=1, H=1, K=2, P=25, L=50, T=2,E=-8;

2. A=2,B=-4, C=1, D=4, M=9, H=36, K=16, P=25, L=400, T=2, E=-16;

3. A=-6, B=6, C=24, D=9, M=25, H=225, K=4, P=25, L=100, T=3, E=-30;

4. A=-2, B=6, C=7, D=1, M=1, H=1, K=2, P=25, L=50, T=2, E=-8;

5. A=4, B=-6, C=5, D=3, M=4, H=36, K=1, P=36, L=36, T=4, E=-28;

6. A=-8,B=4,C=10,D=2,M=3,H=18,K=1,P=2,L=18,T=2,E=-12;

7. A=-2,B=6,C=7,D=1,M=1,H=1,K=2,P=25,L=50,T=2,K=-8;

8. A=3,B=6,C=20,D=6,M=7,H=42,K=1,P=16,L=16,T=2,K=16;

9. A=0,B=-2,C=-3,D=3,M=6,H=24,K=2,P=5,L=30,T=3,E=30;

10. A=2,B=0,C=-5,D=9,M=10,H=90,K=1,P=2,L=14,T=4,E=28;

11. A=-4,B=10,C=20,D=5,M=8,H=80,K=3,P=5,L=45,T=5,K=15;

12. A=2,B=-6,C=3,D=16,M=25,H=400,K=2,P=3,L=30,T=6,E=36;

13.A=-4,B=-8,C=10,D=3,M=4,H=12,K=5,P=7,L=70,T=2,E=-24;

14. A=-6,B=0,C=2,D=2,M=3,H=18,K=9,P=11,L=99,T=3,E=42;

15.A=-4,B=4,C=-1,D=4,M=5,H=40,K=4,P=5,L=40,T=3,E=-42;

16.A=-2,B=2,C=-3,D=9,M=11,H=99,K=2,P=3,L=18,T=2,E=-42;

17. A=8,B=-2,C=1,D=5,M=7,H=70,K=3,P=4,L=12,T=2,E=10;

18. A=2,B=-8,C=-3,D=2,M=3,H=30,K=16,P=25,L=400,T=2,E=-10;

19. A=6,B=4,C=1,D=3,M=5,H=45,K=5,P=8,L=80,T=2,E=26;

20. A=-2,B=-8,C=6,D=1,M=2,H=14,K=9,P=10,L=80,T=2,E=-26;

21. A=10,B=2,C=22,D=2,M=3,H=30,K=3,P=6,L=24,T=3,E=45;

22. A=-12,B=2,C=29,D=1,M=16,H=16,K=6,P=7,L=42,T=3,E=-45;

23. A=-14,B=6,C=49,D=5,M=16,H=60,K=5,P=8,L=40,T=2,E=33;

24. A=12,B=-3,C=27,D=1,M=3,H=18,K=2,P=3,L=18,T=3,E=51;

25. A=14,B=6,C=46,D=1,M=36,H=33,K=3,P=4,L=36,T=3,E=-51;

26. A=-16,B=2,C=52,D=1,M=18,H=36,K=1,P=4,L=16,T=4,E=61;

27. A=0,B=-8,C=0,D=16,M=25,H=100,K=9,P=25,L=225,T=2,E=38;

28. A=0,B=-8,C=-9,D=16,M=25,H=400,K=4,P=9,L=36,T=2,E=40;

29. A=-2,B=0,C=-35,D=2,M=25,H=50,K=2,P=3,L=60,T=3,E=-60;

30. A=2,B=8,C=-32,D=2,M=3,H=60,K=3,P=4,L=12,T=3,E=63.

VI Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

Уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Подобными уравнениями описываются многие физические явления и процессы.

Примеры.

1. $\frac{dx}{dt} = -kx$ - уравнение радиоактивного распада (k – постоянная распада, x – количество неразложившегося вещества в момент времени t, скорость распада $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2. $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt})$ - уравнение движения точки массы m под влиянием силы $\boldsymbol{F}$, зависящей от времени, положения точки, определяемого радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и ее скорости $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Сила равна произведению массы на ускорение.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x,y,z)$ - уравнение Пуассона, задающее зависимость между многими физическими величинами. Например, можно считать, что $u(x,y,z)$ – потенциал электростатического поля, а $\rho(x,y,z)$ – плотность зарядов.

4. $\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{kY}$ - уравнение скорости роста национального дохода Y, пропорционального этому доходу.

Будем рассматривать уравнения, где неизвестная функция является функцией одной переменной. Такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**.

Уравнение вида $$F(x,u(x),u'(x),u''(x),...,u^{(n)}(x)) = 0$$
называется **обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка**. При этом **порядком** уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной.
Функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество, называется **решением** дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

Рассмотрим уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Можно показать, что общее решение такого уравнения зависит от одной произвольной постоянной. С геометрической точки зрения данное уравнение устанавливает зависимость между координатами точки на плоскости и угловым коэффициентом $\frac{dy}{dx}$ касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, задача его решения состоит в том, чтобы найти кривые, называемые **интегральными кривыми**, направление касательных к которым в каждой точке плоскости соответствует этим коэффициентам.

Примеры.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$. В каждой точке, кроме начала координат, угловой коэффициент к искомой интегральной кривой равен $\dfrac{y}{x}$, то есть тангенсу угла, образованного с осью О*x* прямой, проходящей через данную точку и начало координат. Следовательно, интегральными кривыми в данном случае будут прямые вида $y = cx$ (рис.1).

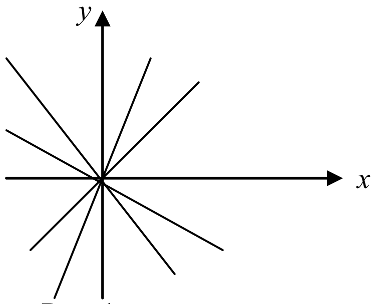


Рис. 1.

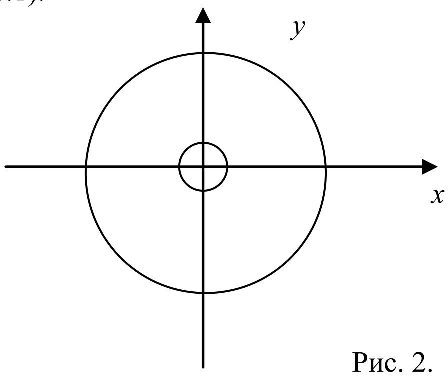


Рис. 2.

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. В этом случае касательная в каждой точке плоскости перпендикулярна направлению прямой, проходящей через эту точку и начало координат, так как угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию ортогональности: $-\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{x} = -1$. Поэтому направление касательной в данной точке совпадает с направлением касательной к окружности с центром в начале координат, на которой лежит выбранная точка. Такие окружности и являются интегральными кривыми данного уравнения (рис. 2).

Задача Коши для уравнения первого порядка.

Как уже было сказано, общим решением уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ является все множество функций, обращающих при подстановке рассматриваемое уравнение в тождество. Пусть теперь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0\,,$$

называемому **начальным условием**. Если общее решение данного уравнения задается формулой $$y = \varphi(x, C),$$
то значение постоянной *C*, соответствующее поставленному начальному условию, можно определить, подставив в предыдущее равенство $x = x_0$ и $y = y_0$.

Задача выбора из общего решения дифференциального уравнения решения, удовлетворяющего начальному условию , называется **задачей Коши**, а выбранное решение называется **частным решением** дифференциального уравнения .

Замечание. Если воспринимать множество всех решений уравнения как множество интегральных кривых на плоскости, то ставится задача поиска той из них, которая проходит через точку с координатами $(x_0\,, y_0)$.

Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, и линейных).

Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx$$

называются **уравнениями с разделяющимися переменными**. Тогда любое решение *y(x)* этого уравнения будет удовлетворять и уравнению

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c,$$

где c – произвольная постоянная.
Последнее уравнение называется **интегралом** данного уравнения, а если оно определяет все решения – **общим интегралом** этого уравнения.

Пример.
$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.
Решение.
Приведем уравнение к виду : $\dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{dx}{x}$, откуда $\int \dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \dfrac{dx}{x} + C$. Проинтегрируем обе части равенства: $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C$. Полученное уравнение можно считать общим интегралом или решением исходного уравнения.

Если требуется найти **частное решение** уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, достаточно подставить значения x_0 и y_0 в общее решение и найти значение c, соответствующее начальному условию.

Пример.
Найти решение уравнения $y'\text{ctg}\, x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(0) = -1$.
Решение.
Разделим переменные: $\int \dfrac{dy}{2-y} = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x} + c$, $-\ln|2-y| = -\ln|\cos x| - \ln|c|$,
$2 - y = c \cdot \cos x$. Подставив в это равенство $x = 0$ и $y = -1$, получим, что $c = 3$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = 2 - 3\cos x$.

Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

Если требуется решить уравнение вида $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by)$,
где a и b – постоянные числа, то с помощью замены переменной $z = ax+by$ оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx.$$

Пример.
$y' = \sqrt{4x+2y-1}$.
Решение.
Замена: $z = 4x + 2y - 1$, тогда $\int \dfrac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \int dx + c$.

Вычислим интеграл в левой части равенства: замена $u = \sqrt{z}, z = u^2, dz = 2udu$ приводит к

$$\int \frac{2udu}{4+2u} = \int\left(1 - \frac{4}{4+2u}\right)du = u - 2\ln|4+2u| = \sqrt{z} - 2\ln(4+2\sqrt{z}) = \sqrt{4x+2y-1} -$$

$-2\ln(4+2\sqrt{4x+2y-1}$. Проинтегрировав теперь правую часть равенства, получим общий интеграл: $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(4+2\sqrt{4x+2y-1} = x + c$.

Однородные уравнения.

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые **однородные дифференциальные уравнения первого порядка**, имеющие вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Действительно, замена $t = \frac{y}{x}$ или $y = xt$ приводит к $\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \quad x\frac{dt}{dx} + t = f(t),$

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + \ln c, \quad x = ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}.$$

Еще одной формой однородного уравнения является уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени однородности. При этом $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$

Пример.

$y^2 + x^2y' = xyy'.$

Решение.

Преобразуем уравнение к виду : $y'(xy - x^2) = y^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$. После замены $y = xt$ получим: $x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t^2}{t-1}, \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-1},$

$$\frac{(t-1)dt}{t} = \frac{dx}{x}, \quad \int\left(1 - \frac{1}{t}dt\right) = \int \frac{dx}{x} + c, \quad t - \ln|t| = \ln|x| + \ln|C|, \quad Cxt = e^t, \quad Cy = e^{\frac{y}{x}}.$$

Линейные уравнения.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x),$$

линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производной. При этом будем предполагать, что $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны.

В случае, когда $f(x) \equiv 0$, уравнение называется **однородным**. Такое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \text{ откуда } \frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c, \qquad y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$, но оно входит в общее решение при $C = 0$.

Для решения неоднородного уравнения применим **метод вариации постоянной**. Предположим, что общее решение исходного уравнения имеет форму $y = Ce^{-\int p(x)dx}$,

в которой C – не постоянная, а неизвестная функция аргумента x: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$. Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим: $\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)\,C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$, откуда

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}, C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c, y = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Пример.
Найти общее решение уравнения $y' = 2x(x^2 + y)$.
Решение.
Представим уравнение в виде: $y' - 2xy = 2x^3$ и решим однородное уравнение: $y' - 2xy = 0$.
$\frac{dy}{dx} = 2xy, \frac{dy}{y} = 2xdx, \int\frac{dy}{y} = \int 2xdx + C_1, \ln|y| = x^2 \ln|C|, y = Ce^{x^2}$. Применим метод вариации постоянных: пусть решение неоднородного уравнения имеет вид:
$y = C(x)e^{x^2}$, тогда $\frac{dy}{dx} = C'e^{x^2} + C(x)e^{x^2}\cdot 2x$. Подставим полученные выражения в уравнение:
$C'e^{x^2} + C(x)e^{x^2}\cdot 2x - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3$. Следовательно, $C' = 2x^3e^{-x^2}$,
$C(x) = \int 2x^3e^{-x^2}dx = \int x^2e^{-x^2}dx^2 = \int te^{-t}dt = -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + c = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + c.$
При этом общее решение исходного уравнения $y = (-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + c)e^{x^2} = ce^{x^2} - x^2 - 1$.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$
где F предполагается непрерывной функцией всех своих аргументов. Тогда можно разрешить это уравнение относительно старшей производной:
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$
Можно доказать, что существует единственное решение уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющее условиям
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Так же, как и для дифференциального уравнения 1-го порядка, задача отыскания решения исходного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется **задачей Коши**.
Общее решение исходного уравнения, содержащего n произвольных постоянных имеет вид:
$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Уравнения, допускающие понижение порядка.

В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование. Рассмотрим один из типов подобных уравнений.
Уравнение не содержит искомой функции и ее производных по порядок $(k-1)$ включительно:
$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$
В этом случае можно сделать замену $p = y^{(k)}$, которая позволяет понизить порядок уравнения до $n - k$, так как после замены уравнение примет вид
$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$
Из этого уравнения можно найти $p = p(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, а затем найти y с помощью интегрирования k раз функции $p = p(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$.
Пример.
Решить уравнение $y''' = y''^2$.
Решение.

Уравнение $y''' = y''^2$ при замене $p(x) = y''$ становится уравнением 1-го порядка относительно p: $p' = p^2$, откуда $\frac{dp}{p^2} = dx,$ $-\frac{1}{p} = x + C_1,$ $p = -\frac{1}{x + C_1}$. Тогда $y' = \int p(x)dx = -\int \frac{dx}{x + C_1} = -\ln(x + C_1) + C_2$, $y = \int y'dx = -\int (\ln(x + C_1) - C_2)dx =$

$= -\int \ln(x + C_1)dx + C_2 x + C_3 = -x\ln(x + C_1) + \int \frac{x}{x + C_1}dx + C_2 x + C_3 = -x\ln(x + C_1) + x -$

$-C_1 \ln(x + C_1) + C_2 x + C_3 = C_3 + \overline{C}_2 x - (x + C_1)\ln(x + C_1)$.

Варианты индивидуальных заданий №5

Задача 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $ctgydx - xdx = 0$

2. $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$

3. $\cos ydy + \sin xdx = 0$

4. $\cos xdy - (y+1)\sin xdy = 0$

5. $(y-1)dx + (1-x)dy = 0$

6. $dy = e^{x+y}dx$

7. $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$

8. $dy - 2\sqrt{y}\sin xdx = 0$

9. $\sin 3ydx + x\cos ydy = 0$

10. $y^2(x-1)dx - x^2(y^2+1)dy = 0$

11. $2tgydx - 3x^2dy = 0$

12. $3y^2dx + (\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{x})dy = 0$

13. $2\cos^2 xdy + 3\sin^2 ydx = 0$

14. $3\sin xdy - (y^2+1)\cos xdx = 0$

15. $(y^2+1)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$

16. $xdy - e^y dx = 0$

17. $(x^2y^3 - y^3)dx - (x^3y - x^3)dy = 0$

18. $2y^3dx - 3(\sqrt{xy} + \sqrt{y})dx = 0$

19. $3e^x dy - 2y^2dx = 0$

20. $(y+2)dx - e^2 xdy = 0$

21. $(y^2+2y)dy - (x^2+1)dx = 0$

22. $(y+1)dy - e^x dx = 0$

23. $3y^2e^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$

24. $y(x^2+1)dy - (y^2-1)dx = 0$

25. $2(x^3+3)dy - yx^2dx = 0$

26. $ydy - (y^2-1)\sin xdx = 0$

27. $(xy^2 + y^2)dy - dx = 0$

28. $(x^2 + x^2y^2)dx - dy = 0$

29. $(\sin x + 1)dy - \cos xdx = 0$

30. $xdy - \frac{y}{x}dx = 0$

Задача 2.

Решить задачу Коши при начальных условиях:

$$y'(0)=1; y(0)=-1$$

1. $y''=x^2-\frac{1}{4}x$

2. $y''=-4x+\frac{1}{5}x^2$

3. $y''=6x^2-\frac{1}{2}x$

4. $y''=x^2-\frac{1}{7}$

5. $y''=-\frac{1}{4}x^2+2x$

6. $y''=3x^2-4x$

7. $y''=\frac{1}{5}x-3x^2$

8. $y''=-\frac{1}{4}x+2x^2$

9. $y''=3x^2-\frac{1}{15}$

10. $y''=-x-8x^2$

11. $y''=16x^2+9$

12. $y''=-7x+\frac{1}{6}x^2$

13. $y''=\frac{1}{3}x^2-4$

14. $y''=-\frac{1}{2}x^2+4x$

15. 1 $y''=3x-\frac{1}{16}x^2$

16. $y''=-8x^2+\frac{1}{9}$

17. $y''=-9+\frac{1}{3}x^2$

18. $y''=4x^2-13x$

19. $y''=-6x^2+\frac{1}{13}x$

20. $y''=12x^2-5x$

21. $y''=-3x+\frac{1}{15}x^2$

22. $y''=-4x^2-\frac{1}{7}x$

23. $y''=5x-\frac{3}{4}x^2$

24. $y''=11x^2+\frac{1}{9x}$

25. $y''=-x^2-\frac{5}{3}$

26. $y''=\frac{1}{3}x-4x^2$

27. $y''=\frac{4}{5}x^2-11$

28. $y''=-\frac{1}{5}x^2+18x$

29. $y''=6x^2-\frac{4}{7}$

30. $y''=7x-\frac{1}{11}x^2$

VII Линейная алгебра.

2. Матрицы и определители.

Матрицы. Операции над матрицами.

Прямоугольной матрицей размера m×n называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называются ее **элементами**; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются **равными**, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$. Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно **вектор-строкой** или **вектор-столбцом.** Вектор-столбцы и вектор-строки называют просто **векторами.** Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица размера m×n, все элементы которой равны нулю, называются **нулевой матрицей** и обозначается через 0. Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют элементами **главной диагонали**. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть m = n, то матрицу называют **квадратной** порядка n. Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются **диагональными матрицами** и записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы a_{ii} диагональной матрицы равны 1, то матрица называется **единичной** и обозначается буквой E:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. **Транспонированием** называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком T наверху.

Пусть дана матрица A. Переставим строки со столбцами. Получим матрицу

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая будет транспонированной по отношению к матрице A. В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число λ: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.
Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Произведение АВ матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.
Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{im} b_{mk} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk}.$$

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент i-й строки и k-го столбца матрицы С равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы k-го столбца матрицы В.

Пример Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.
Имеем: матрица А размера 2×3, матрица В размера 3×3, тогда произведение АВ = С существует и элементы матрицы С равны
$c_{11} = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 1\cdot3 = 8$, $c_{21} = 3\cdot1 + 1\cdot2 + 0\cdot3 = 5$, $c_{12} = 1\cdot2 + 2\cdot0 + 1\cdot5 = 7$,
$c_{22} = 3\cdot2 + 1\cdot0 + 0\cdot5 = 6$, $c_{13} = 1\cdot3 + 2\cdot1 + 1\cdot4 = 9$, $c_{23} = 3\cdot3 + 1\cdot1 + 0\cdot4 = 10$.
$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, а произведение ВА не существует.

3. Определители и их свойства.

Пусть нам дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все возможные произведения по n элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т.е. произведений вида:

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \ldots a_{nq_n},$$

где индексы q_1, q_2,..., q_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,..., n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Знак произведения равен $(-1)^q$, где q - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов.
Определителем n -го порядка, соответствующим матрице А , называется алгебраическая сумма n! членов вида ($a_{1q_1} a_{2q_2} \ldots a_{nq_n}$). Для записи определителя употребляется символ

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (детерминант, или определитель, матрицы А).

Свойства определителей.
1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.
7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$ ($j=\overline{1,n}$), то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.
8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.
Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.
Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.
Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя d называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.
Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).
Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки

$$d = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \quad (i = \overline{1,n})$$

или j- го столбца

$$d = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \quad (j = \overline{1,n}).$$

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Пример 1. Не вычисляя определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, показать, что он равен нулю.

Решение.

Вычтем из второй строки первую, получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, равный исходному. Если из третьей строки также вычесть первую, то получится определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$, в котором две строки пропорциональны. Такой определитель равен нулю.

Пример 2. Вычислить определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.
Решение.
Разложим определитель по элементам второго столбца:

$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

Обратная матрица.

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим Δ =det A.
Квадратная матрица A называется **невырожденной**, или **неособенной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, или **особенной**, если $\Delta = 0$.
Квадратная матрица B называется **обратной** для квадратной матрицы A того же порядка, если их произведение A B = B A = E, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и B.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице A, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение.
Находим сначала детерминант матрицы A

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, значит, обратная матрица существует и мы ее можем найти по

формуле: $A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} (i,j=1,2,3) - алгебраические дополнения элементов a_{ij} исходной матрицы.

Имеем: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+4 = 6,\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3,\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \text{ откуда } A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые **системы крамеровского типа:**

$$\begin{gathered} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n1} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n. \end{gathered}$$

Системы подобного вида решаются одним из следующих способов: 1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных; 2) по формулам Крамера; 3) матричным методом.

Метод Гаусса.

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{gathered} x + y - 3z = 2, \\ 3x - 2y + z = -1, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{gathered}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим z = -1,3. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем y = -1,2. Далее из первого уравнения получим x = - 0,7.

Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим **главный определитель системы,** т.е. определитель матрицы А

$$\Delta = \det (a_{i\,j})$$

и n **вспомогательных определителей** Δ_i ($i=\overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i \ (i = \overline{1,n}).$$

Из последнего следует **правило Крамера**, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности исходной системы: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta.$$

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$ ($i=\overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы Δ = 0, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример. Решить методом Крамера систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Решение.

Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители Δ_i ($i=\overline{1,4}$), получающиеся из определителя Δ путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при x_i, столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142.$$

Отсюда $x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$, $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$, $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$, $x_4 = \Delta_4/\Delta = -1$, решение системы - вектор $C=(1, 2, 3, -1)^T$.

Матричный метод.

Если матрица A системы линейных уравнений невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную, и решение системы совпадает с вектором $C = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле X=C, $C=A^{-1}B$ называют **матричным способом решения системы**, или *решением* **по методу обратной матрицы.**

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $B = (6, 3, 5)^{T.}$

Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением AX=B.

Поскольку $\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, то матрица A невырождена и поэтому имеет обратную:

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для получения решения X мы должны умножить вектор-столбец B слева на матрицу A: $X = A^{-1}B$. В данном случае

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над матрицами, получим:

x_1 = 1/5(1·6+3·3-2·5) = 1/5 (6+9-10) = 1,
x_2 = 1/5 (-3·6 +1·3 - 1·5) = 1/5 (- 18 + 3 + 5) = -2,
x_3 = 1/5 (1·6 - 2·3 + 3·5) = 1/5 (6 -6 + 15) = 3.

Итак, C = $(1, -2, 3)^T$.

Варианты индивидуальных заданий №6.

Задача 1.

Выполнить действия с матрицами A,B,C,D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.$(2A+B+E)C+D^2$
2.$(A-B+E)D+C^2$
3.$(A+3B-C)D+E$
4.$(2B-C+E)A+A^2$
5.$(3A-C+E)B-D^2$
6.$(4A+D-E)C+A^2$
7.$(A+2B-D)C-E$
8.$(A^2+B)C-E+3D$
9.$(2A+B)D+C^2$
10.$(2C-E)B+A-D^2$
11.$(3A-B+E)C+D^2$
12.$(4A+B^2-C)D+E$
13.$(2B-C^2)A+B^2+E$
14.$(A^2+3B-E)C-E$
15.$(4A+B^2-E)D+A$
16.$(2A-B+C^2)D+E$
17.$(A+2B-D)C+E$
18.$(2A-B+C)D-E$
19.$(A-E+3D)C+E$
20.$(2A+C^2-D)B-E$
21.$(A-E+2C)D+B^2$
22.$(B+E-3A)C+D^2$
23.$(2B-E+C)D-A^2$
24.$(A+2B-E)C+D$
25.$(2A-C+E)D-B^2$
26.$(A-E+B)D+C^2$
27.$(A+2B+E)C-D^2$
28.$(3C+B+E)D-A^2$
29.$(D-3B+E)C+A^2$
30.$(5A+E-D)C+B^2$
31.$(4A-2E+B)D-C$
32.$(A-3B+E)C+D^2$

Задача 2

Дана матрица А. Найти A^{-1} и установить, что $A \cdot A^{-1} = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -6 & -7 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

Решить СЛАУ по формулам Крамера, матричным способом и методом Гаусса (*).

1.

$$\begin{aligned} &2X_1 - X_2 + X_3 = 2 \\ &X_1 - X_2 - 3X_3 = -3 \\ &5X_1 + X_2 - 4X_3 = 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &4X_1 + 3X_2 - 8X_3 = 1 \\ &X_1 - 6X_2 + 6X_3 = 0 \\ &2X_1 + 9X_2 - 4X_3 = 3 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &5X_1 + 6X_2 - X_3 = 7 \\ &X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ &2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 9 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} &3X_1 + 4X_2 + 7X_3 = -1 \\ &-2X_1 + 5X_2 - 3X_3 = 1 \\ &5X_1 - 6X_2 + 11X_3 = -3 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 - X_3 = 2 \\ &X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ &X_1 - X_2 + X_3 = -2 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} &2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ &X_1 + 3X_2 + X_3 = -1 \\ &X_1 + X_2 + X_3 = 2 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} &2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ &2X_1 + 2X_2 + X_3 = 3 \\ &3X_1 + 3X_2 + X_3 = 5 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 - X_3 = 1 \\ &X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 2 \\ &2X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 3 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} &3X_1 - 2X_2 + 2X_3 = -7 \\ &3X_1 - X_2 + 4X_3 = -8 \\ &6X_1 - 4X_2 + 5X_3 = -15 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} &5X_1 - 4X_2 + 2X_3 = 1 \\ &2X_1 - 2X_2 + X_3 = 1 \\ &6X_1 - 3X_2 + 3X_3 = 0 \end{aligned}$$

6.

$$X_1 + X_2 - 2X_3 = -2$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 4$$
$$-X_1 + X_2 - X_3 = -2$$

7.

$$2X_1 - X_2 - X_3 = 2$$
$$X_1 - X_2 + X_3 = 2$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

14.

$$5X_1 + 2X_2 + 6X_3 = 14$$
$$3X_1 + X_2 + X_3 = 7$$
$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 8$$

15.

$$X_1 - 4X_2 + 2X_3 = 5$$
$$X_1 - 3X_2 + 3X_3 = 7$$
$$2X_1 - 4X_2 + 2X_3 = 6$$

8.

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 2$$
$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 3$$

16.

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4$$
$$2X_1 + 4X_2 - 9X_3 = 8$$
$$4X_1 + X_2 + X_3 = 9$$

17.

$$7X_1 - 5X_2 - X_3 = 4$$
$$3X_1 + 7X_2 + X_3 = 6$$
$$X_1 + 10X_2 + 2X_3 = 7$$

24.

$$3X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 6$$
$$3X_1 + 4X_2 - 4X_3 = 6$$
$$X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$$

18.

$$4X_1 - 2X_2 - X_3 = 7$$
$$-X_1 - 8X_2 + 2X_3 = -16$$
$$7X_1 - 6X_2 + X_3 = 20$$

25.

$$X_1 + 6X_2 + 5X_3 = 9$$
$$2X_1 - 4X_2 + 12X_3 = 2$$
$$2X_1 - X_2 + X_3 = 3$$

19.

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 9$$
$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 11$$
$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 16$$

26.

$$4X_1 - 3X_2 - X_3 = 2$$
$$-X_1 + 10X_2 + 2X_3 = 7$$
$$7X_1 - 5X_2 - X_3 = 1$$

20.

$$\begin{aligned}6X_1-4X_2+5X_3&=-7\\3X_1-X_2+4X_3&=-3\\3X_1-2X_2+2X_3&=-3\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}3X_1-4X_2+2X_3&=3\\-4X_1+X_2-2X_3&=-3\\6X_1-3X_2+3X_3&=3\end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}5X_1-4X_2+3X_3&=1\\2X_1-2X_2-X_3&=0\\2X_1-X_2-X_3&=1\end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned}3X_1+2X_2+6X_3&=4\\2X_1+X_2+3X_3&=3\\4X_1+4X_2+6X_3&=10\end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}4X_1+5X_2+7X_3&=-1\\-3X_1+2X_2+3X_3&=-1\\-X_1+3X_2+X_3&=2\end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned}4X_1-3X_2-X_3&=3\\X_1-3X_2-X_3&=-1\\2X_1-4X_2+2X_3&=1\end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned}3X_1-3X_2+2X_3&=-1\\X_1+2X_2+X_3&=2\\X_1-X_2&=-2\end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}X_1+3X_2&=0\\X_1-X_2-X_3&=2\\2X_1+X_2+X_3&=1\end{aligned}$$

Критерий выставления оценок за выполнение индивидуальных заданий по математике.

Вид работы	5	4	3
Самостоятельная работа студента по индивидуальному заданию.	Работа выполнена полностью без ошибок или допущено не более 3 недочетов (95-100% заданий)	Работа выполнена полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета или не более 4 недочетов (75-94%)	Правильно выполнено 60-74% всех заданий или допущено одна грубая ошибка и 3 недочета, или при наличии 5 недочетов

Перечень ошибок:

а) **грубые ошибки**: незнание определений, основных понятий, формул; неумение выделять в решении главное, применять знания для решения задач; неверное направление хода решения задачи; незнание приемов решения задач, аналогичных ранние решенным; ;

б) **негрубые ошибки:** неточности формулировок, определений, понятий; неполный охват основных свойств, признаков, определяемых понятий; неточности чертежей, графиков,; нерациональное решение задачи; незначительные погрешности в решении, не имеющие решающего значения;

в) **недочеты**: нерациональные записи при вычислении и приемы вычислений, преобразований в решении задач; незначительные погрешности вычислений; небрежность в записи, выполнение чертежей, графиков, орфографии.

Литература

1.Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1) – М.: «ОНИКС», 2008
2.Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2) – М.: «ОНИКС», 2008
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике М.: «Высшая школа»

Список использованной литературы

1 .Пехлецкий И.Д. Математика, учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования – М.: «Академия», 2003
2. Писменный Д. Конспект лекций по высшей математике – М.: « Айрис-Пресс», 2004

Использованные Интернет-ресурсы

1. http://nashaucheba.ru/v17065

2. ecnmx.ru›down/o-44.html